

ANEXO INTEGRALES

1 - INTEGRALES de LINEAS

Teorema de existencia de la función potencial

Dado $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ continuo con derivadas parciales primeras y segundas continuas en un conjunto simplemente conexo que contiene a la curva C regular a trozos. El campo vectorial \vec{F} admite función potencial ϕ cuya expresión es

$$\phi = \int_a^x P(x, b, c) dx + \int_b^y Q(x, y, c) dy + \int_c^z R(x, y, z) dz \quad \text{si y solo si } P_y = Q_x, P_z = R_x, R_y = Q_z$$

Demostración:

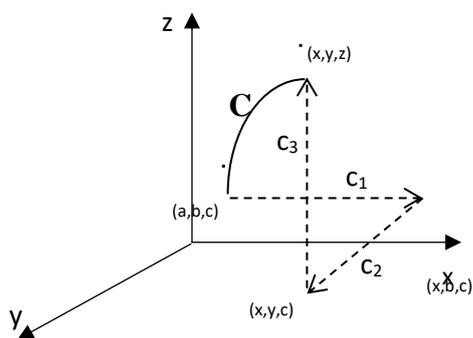
\Rightarrow) Si existe ϕ debe cumplir $\phi_x = P, \phi_y = Q, \phi_z = R \Rightarrow$

$$\begin{cases} P_y = \phi_{xy} \\ Q_x = \phi_{yx} \end{cases} \quad \text{son iguales por cumplir con las condiciones de Bonnet } \Rightarrow P_y = Q_x$$

Idem para los otros casos.

\Leftarrow) Si se cumple $P_y = Q_x, P_z = R_x, R_y = Q_z \Rightarrow$ vamos a buscar la función potencial ϕ del

campo \vec{F} calculando $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ a lo largo de la poligonal que une (a,b,c) con (x,y,z).



$$c_1 : \begin{cases} x = x \\ y = b \\ z = c \end{cases} \quad a \leq x \leq x; \quad d\vec{r} = dx \vec{i}$$

$$c_2 : \begin{cases} x = x \text{ (fijo, constante)} \\ y = y \text{ variable} \\ z = c \end{cases} \quad b \leq y \leq y; \quad d\vec{r} = dy \vec{j}$$

$$c_3 : \begin{cases} x = x \text{ (fijo, constante)} \\ y = y \text{ (fijo, constante)} \\ z = z \end{cases} \quad c \leq z \leq z; \quad d\vec{r} = dz \vec{k}$$

Se calcula

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

la cual existe por que las hipótesis permiten integrar.

Para C_1 :

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = P(x, b, c) \vec{i} + Q(x, b, c) \vec{j} + R(x, b, c) \vec{k}, \quad d\vec{r} = dx \vec{i} \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = P(x, b, c) dx$$

De forma similar se calcula $\vec{F}(\vec{r}(t))$ a lo largo de C_2 y C_3 , obteniendo

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^x P(x, b, c) dx + \int_b^y Q(x, y, c) dy + \int_c^z R(x, y, z) dz = \phi_{\text{def}}$$

Ahora veamos si cumple que $\phi_x = P$, $\phi_y = Q$, $\phi_z = R$

$$\phi = \int_a^x P(x, b, c) dx + \int_b^y Q(x, y, c) dy + \int_c^z R(x, y, z) dz$$

$$\phi_x = \frac{d}{dx} \int_a^x \underbrace{P(x, b, c) dx}_{\text{Teorema fundamental de Integral Curvilinea}} + \frac{d}{dx} \int_b^y \underbrace{Q(x, y, c) dy}_{\text{por propiedad de integrales y derivadas}} + \frac{d}{dx} \int_c^z \underbrace{R(x, y, z) dz}_{\text{por propiedad de integrales y derivadas}} =$$

$$= P(x, b, c) + \int_b^y \underbrace{Q_x(x, y, c) dy}_{\text{por hipótesis } Q_x = P_y} + \int_c^z \underbrace{R_x(x, y, z) dz}_{\text{por hipótesis } R_x = P_z}$$

$$= P(x, b, c) + \underbrace{\int_b^y P_y(x, y, c) dy + \int_c^z P_z(x, y, z) dz}_{\text{por ser integrales y derivadas operaciones inversas}}$$

$$= P(x, b, c) + P(x, y, c) \Big|_b^y + P(x, y, z) \Big|_c^z$$

$$= P(x, b, c) + P(x, y, c) - P(x, b, c) + P(x, y, z) - P(x, y, c)$$

$$\phi_x = P(x, y, z)$$

Idem para ϕ_y, ϕ_z

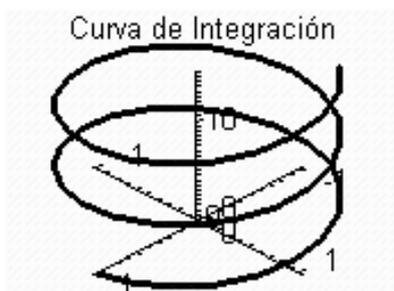
EJEMPLOS RESUELTOS con MAPLE

Ejercicio 1: Calcular el trabajo realizado por la fuerza $F = x y^2 i + (y - z) j + z k$ a lo largo de la curva de ecuación $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = t$ con $t = 0$ hasta $t = 6\pi$

Solución:

>with(plots):

> spacecurve([cos(t),sin(t),t],t=0..6π,title=`Curva de Integración`,thickness=2,color=black); # Gráfica de curva de integración en el espacio



> with(linalg):

> f:=(x,y,z)->vector([x*y^2,y-z,z]);#Campo vectorial

$f := (x, y, z) \rightarrow \text{linalg}:-\text{vector}([x y^2, y - z, z])$

> rt:=vector([cos(t),sin(t),t]);#Curva C

$rt := \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) & t \end{bmatrix}$

> g:=f(cos(t),sin(t),t);F(r(t))

$g := \begin{bmatrix} \cos(t) \sin(t)^2 & \sin(t) - t & t \end{bmatrix}$

> rt1:=map(diff,rt,t);#Derivada de r(t)

$rt1 := \begin{bmatrix} -\sin(t) & \cos(t) & 1 \end{bmatrix}$

> innerprod(g,rt1);#Producto de F(r(t))por derivada de r(t)

$-\cos(t) \sin(t)^3 + \cos(t) \sin(t) - \cos(t) t + t$

> Int(%,t=0..6*Pi);

$\int_0^{6\pi} (-\cos(t) \sin(t)^3 + \cos(t) \sin(t) - \cos(t) t + t) dt$

```
> value(%);
```

$18\pi^2$

```
> evalf(%);
```

177.652879:

Ejercicio 2: Calcular la masa de un alambre que tiene la forma de circunferencia de ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y densidad $d=x$.

Solución:

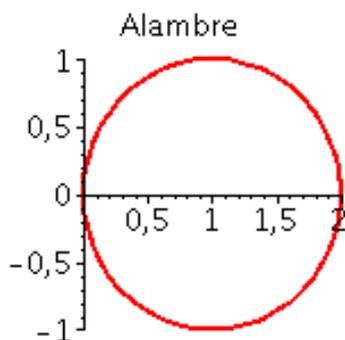
```
> Lineint(x,x=1+cos(t),y=sin(t),t=0..2*Pi);
```

$$\int_0^{2\pi} (1 + \cos(t)) \sqrt{\left(\frac{d}{dt} (1 + \cos(t))\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \sin(t)\right)^2} dt$$

```
> value(%);
```

2π

```
> plot([1+cos(t),sin(t),t=0..2*Pi],title=`Alambre`);
```



Ejercicio 3: a) Analizar si el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = 2xy \vec{i} + x^2 + z^2 \vec{j} + 2yz \vec{k}$ es o no gradiente de algún campo escalar, en caso afirmativo calcularlo.

b) Calcular el trabajo realizado por el campo vectorial dado para desplazar una partícula material a lo largo de una curva seleccionada por Ud.

Solución:

a) Analizaremos si el campo vectorial dado admite función potencial utilizando la sentencia "potential" del paquete linalg.

```
> with(linalg):
```

```
> F:=[2*x*y,x^2+z^2,2*y*z];
```

$$F := [2xy, x^2 + z^2, 2yz]$$

> potential(F,[x,y,z],U); # Verifica la existencia de la función potencial

true

> U; # Muestra el potencial

$$x^2y + z^2y$$

b) Como el campo vectorial dado tiene función potencial usamos el segundo teorema fundamental

El comando "unapply" permite reconocer una expresión como función de las variables que en ella aparecen

>U:=unapply(%x,y,z); # Transforma el potencial en una función de (x,y,z)

Consideremos la curva que une los puntos A=(1,1,1) y B=(1/2,-1,sqrt(2))

> U(A):=U(1,1,1);

$$U(A) := 2$$

> U(B):=U(1/2,-1,sqrt(2));

$$U(B) := -\frac{9}{4}$$

> Trabajo:=U(B)-U(A);

$$\text{Trabajo} := -\frac{17}{4}$$

Ejercicio 4: Calcular la masa M de un muelle que tiene forma de hélice de ecuación vectorial

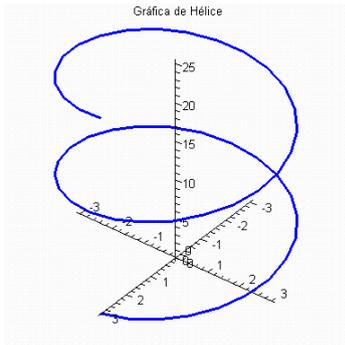
$$\vec{r}(t) = 3 \cos t \vec{i} + 3 \sin t \vec{j} + 2t \vec{k} \quad \text{y densidad } u = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

> with(plots): with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):

> r := <3*cos(t), 3*sin(t), 2*t>;#Definición C (hélice)

$$r := 3 \cos(t) e_x + 3 \sin(t) e_y + 2t e_z$$

> spacecurve(evalm(r), t=0..4*Pi, title=`Gráfica de Hélice`,thickness=2);



```
> dr := diff(r, t);
```

$$dr := -3 \sin(t)e_x + 3 \cos(t)e_y + 2e_z$$

```
> ds := Norm(dr, 2);
```

$$ds := \sqrt{13}$$

```
> ds := simplify( ds ) assuming real;#Cálculo de ds
```

$$ds := \sqrt{13}$$

```
> f:=(x,y,z)->x^2+y^2+z^2;#Función Densidad
```

$$f := (x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 + z^2$$

```
> g:=f(3*cos(t), 3*sin(t), 2*t);
```

$$g := 9 \cos(t)^2 + 9 \sin(t)^2 + 4 t^2$$

```
> Int(g*ds, t=0..4*Pi);# Plantea cálculo de masa
```

$$\int_0^{4\pi} (9 \cos(t)^2 + 9 \sin(t)^2 + 4 t^2) \sqrt{13} dt$$

```
> int(g*ds, t=0..4*Pi);# Cálculo de masa
```

$$36 \sqrt{13} \pi + \frac{256}{3} \sqrt{13} \pi^3$$

```
> evalf(%);
```

```
9947.594391
```

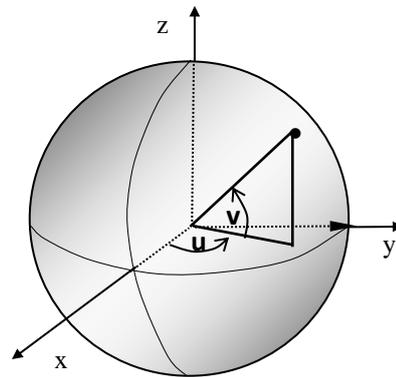
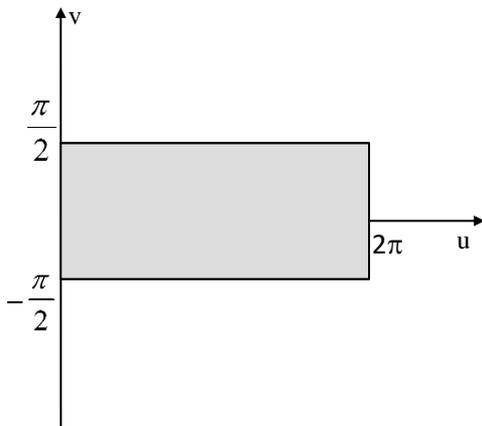
2- Integrales de Superficie

Representación Paramétrica de Superficies

Ejemplo 1:

Representación paramétrica de una **esfera de radio a y centro en el origen**.

$$(1) \begin{cases} x = a \cos u \cos v \\ y = a \operatorname{senu} \cos v \\ z = a \operatorname{senv} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq u \leq 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Representación vectorial: $\vec{r}(u,v) = a \cos u \cos v \vec{i} + a \operatorname{senu} \cos v \vec{j} + a \operatorname{senv} \vec{k}$

Si se eleva al cuadrado las ecuaciones del sistema (1) y sumamos, resulta $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ por lo que todo punto (x, y, z) que satisface (1) pertenece a la esfera.

Los parámetros u y v en este ejemplo pueden interpretarse geoméricamente como los ángulos dibujados en la figura.

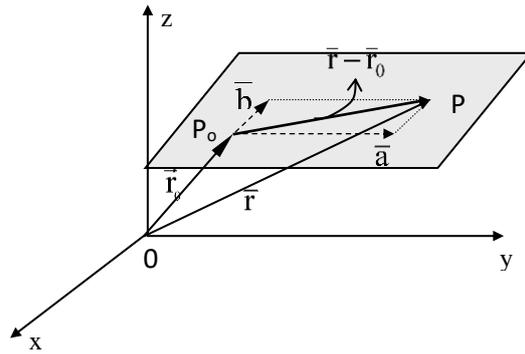
Si el punto (u,v) varía en el rectángulo $T = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ los puntos determinados por (1) describen toda la esfera. Observe que el hemisferio superiores es la imagen del rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$

Ejemplo 2: Representación paramétrica de un plano

Se recuerda que un plano queda determinado por la condición de pasar por un punto y ser paralelo a dos vectores no paralelos, o sea linealmente independientes. Dados los vectores:

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \quad , \quad \vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

Es P un punto del plano sí y solo sí son coplanares los vectores $\overrightarrow{P_0P}$, \vec{a} y \vec{b} , o sea si y solo si existe entre ellos una relación lineal.



Debe ser no nulo el coeficiente de $\overline{P_0P}$, pues de lo contrario \vec{a} y \vec{b} serían linealmente dependientes, contra lo supuesto; por lo que puede despejarse $\overline{P_0P} = \overline{OP} - \overline{OP_0} = \vec{r} - \vec{r}_0$; donde $\vec{r} - \vec{r}_0 = u \vec{a} + v \vec{b}$, o sea:

$$(A) \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + u \vec{a} + v \vec{b} \quad (\vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ linealmente independientes})$$

llamada **ecuación vectorial paramétrica del plano**.

Para cada par de valores de los parámetros u y v, se tiene un punto P del plano, dado por el vector que lo sitúa, desde el origen, y recíprocamente.

Proyectando (A) sobre cada eje de coordenadas, o sea multiplicando escalarmente por $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, se obtienen las ecuaciones paramétricas del plano:

$$\begin{cases} x = x_0 + u a_1 + v b_1 \\ y = y_0 + u a_2 + v b_2 \\ z = z_0 + u a_3 + v b_3 \end{cases}$$

Luego la **representación vectorial de un plano** es:

$$\vec{r}(u, v) = (x_0 + a_1 u + b_1 v) \vec{i} + (y_0 + a_2 u + b_2 v) \vec{j} + (z_0 + a_3 u + b_3 v) \vec{k}$$

Nota: Los parámetros u y v son coordenadas cartesianas en el plano.

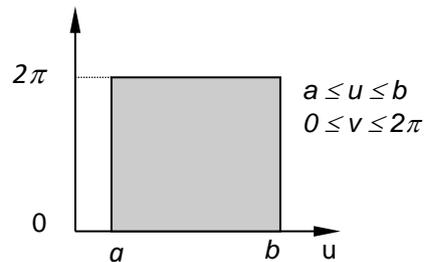
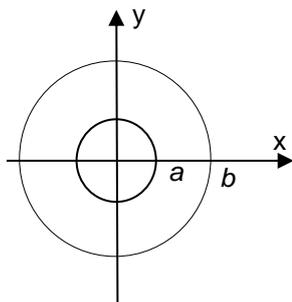
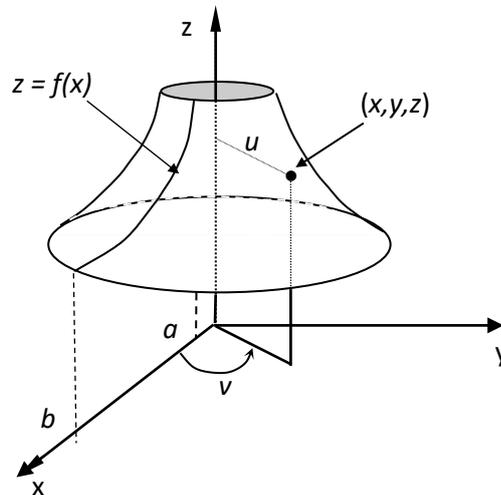
Parametrización de una superficie de revolución

Supongamos una curva C en el plano xz, que gira alrededor del eje z.

Sea $z = f(x)$ su ecuación en el plano xz, $a \leq x \leq b$, $a \geq 0$, la superficie de revolución S así engendrada puede representarse por la ecuación vectorial.

$$\vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \operatorname{sen} v \vec{j} + f(u) \vec{k}$$

donde $(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$. Los parámetros u y v pueden interpretarse como el radio y el ángulo polar, como se ve en la figura.



Ejemplo 3:

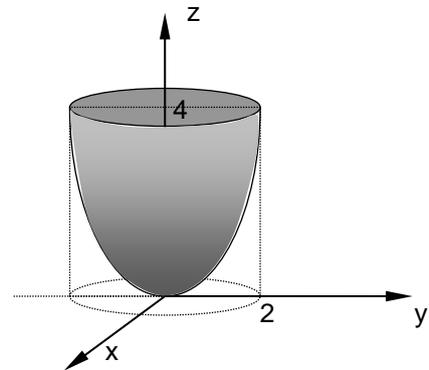
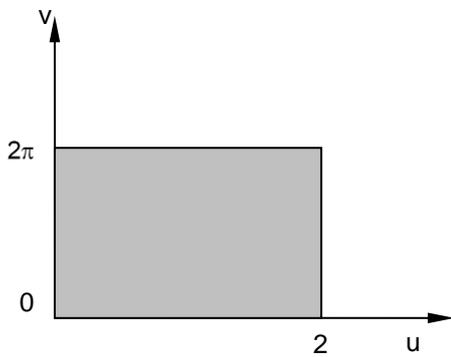
a) paraboloides circular : $z = x^2 + y^2$, $z = 4$

Teniendo en cuenta que la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en coordenadas paramétricas es:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 2 \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

reemplazando en la ecuación del paraboloides circular obtenemos:

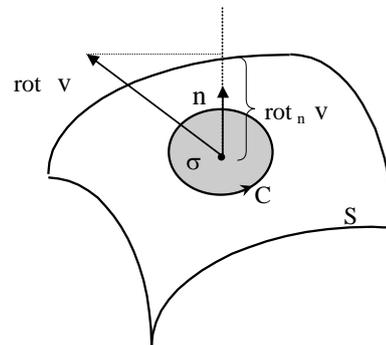
$$z = u^2 \cos^2 v + u^2 \operatorname{sen}^2 v = u^2 (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) = u^2$$



Luego las **ecuaciones paramétricas** del paraboloid circular son:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u^2 \end{cases}$$

y la **ecuación vectorial** del paraboloid dado es



$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + u^2 \vec{k} \quad , \quad 0 \leq u \leq 2 \quad , \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

b) cono circular: $z^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad z = 3$

Teniendo en cuenta la ecuación en coordenadas paramétricas de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \end{cases}$$

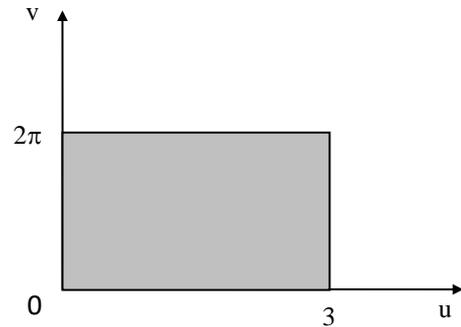
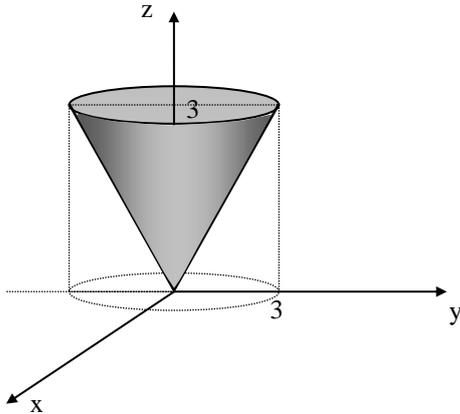
reemplazando en la ecuación del cono circular dado obtenemos:

$$z = \sqrt{u^2 (\cos^2 v + \sin^2 v)} = u$$

Luego, la **ecuación paramétrica** del cono circular dado es:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases} \quad 0 \leq v \leq 2\pi \quad 0 \leq u \leq 3$$

y su ecuación vectorial es: $\vec{r} = \vec{r}(u,v) = u \cos v \vec{i} + u \operatorname{sen} v \vec{j} + u \vec{k}$



EJEMPLOS RESUELTOS CON SOFTWARE

Ejemplo : Calcular el área lateral de la porción del plano $2x + y + 2z = 6$, ubicada en el primer octante.

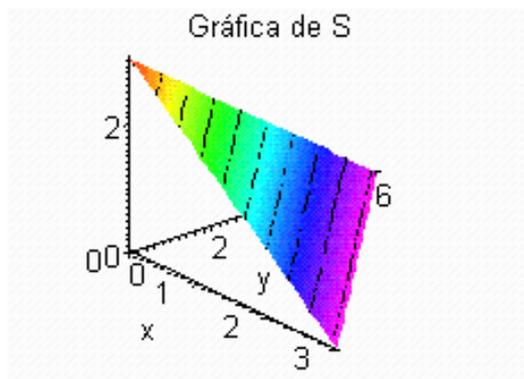
Solución

> `with(plots) :`

> `solve(2*x+y+2*z=6,z) ;#Despeja z de la ecuación del plano.`

$$-x - \frac{1}{2}y + 3$$

> `plot3d(-x-1/2*y+3,x=0..3,y=0..6-2*x,title=`Gráfica de S`);`



> `with(linalg) :`

> `v1:=convert(grad(2*x+y+2*z-6,[x,y,z]),list); # Convierte gradiente en una lista`

$$v1 := [2, 1, 2]$$

> `dS:=1/(v1[3]/sqrt(dotprod(v1,v1))); # Jacobiano`

$$dS := \frac{3}{2}$$

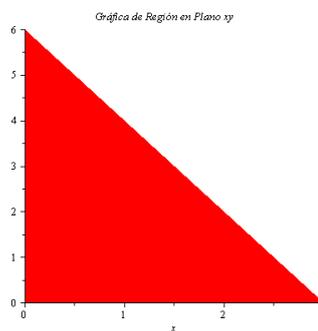
> A:=Int(Int(dS,y=0..-2*x+6),x=0..4); #Area lateral

$$A := \int_0^4 \int_0^{-2x+6} \frac{3}{2} dy dx$$

> A:=int(int(ds,y=0..-3/4*x+3),x=0..4);

$$A := 9$$

> plot(6-2*x,x=0..3,title=`Gráfica de Región en Plano xy`,filled=true);



Ejemplo: Determinar el centro de gravedad de la superficie de una semiesfera de radio a .

Solución:

Se utiliza la representación: $\vec{r}(u,v) = a \cos u \cos v \vec{i} + a \sin u \cos v \vec{j} + a \sin v \vec{k}$ con

$$0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq \pi/2$$

$$\text{Vimos que } \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| = a^2 \cos v$$

En este ejemplo se considera la densidad $f = f(x,y,z)$ constante, $f = c$.

$$m = \iint_S f dS = c \iint_S dS = 2\pi a^2 c$$

Debido a la simetría, las coordenadas \bar{x} e \bar{y} del centro de gravedad son 0.

$$\bar{z} m = c \iint_S z dS = c \iint_T a \sin v a^2 \cos v du dv$$

$$= c a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} v \cos v \, dv \, du = \pi a^3 c, \text{ luego } \bar{z} = \pi a^3 \frac{c}{m} = \frac{\pi a^3 c}{2\pi a^2 c} = \frac{a}{2}$$

Otras operaciones con el operador $\vec{\nabla}$

1) $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} U$, esto define el vector **rot grad U** y se calcula mediante el determinante

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} U = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

2) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{f})$, esto se interpreta como **div rot f**, y se calcula

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Si \vec{f} es un **campo gradiente** y ϕ es su función potencial entonces $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = 0$ osea que la divergencia del rotor de \vec{f} es nula. Para demostrar esto, se ve que $\vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0}$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = (\phi_{zy} - \phi_{yz}) \vec{i} + (\phi_{xz} - \phi_{zx}) \vec{j} + (\phi_{yx} - \phi_{xy}) \vec{k} = \vec{0}$$

3) El operador Δ (delta) de Laplace ($\Delta U = \vec{\nabla}^2 U$)

El operador Δ (delta) de Laplace, aplicado a un campo escalar $U = U(x,y,z)$ define la *div grad U*:

$$\Delta U = \vec{\nabla}^2 U = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} U) = \operatorname{div grad} U$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} U_x + \frac{\partial}{\partial y} U_y + \frac{\partial}{\partial z} U_z \\
&= U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}
\end{aligned}$$

Por lo que : $\vec{\nabla}^2 U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$ denominado **laplaciano** de U

Si U es la temperatura, el laplaciano da información acerca de la ganancia o pérdida de calor en la región.

En muchos planteos matemáticos y aplicaciones de Física y de Química se presenta la "**ecuación diferencial de Laplace**", $\nabla^2 U = 0$. Las funciones U que satisfacen esta ecuación se llaman **armónicas**