ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1. INTRODUCCIÓN

El conocimiento de las ecuaciones diferenciales es esencial para entender importantes problemas físicos y matemáticos.

Esto fue reconocido en el siglo XVII por Newton y usado por él en el estudio del movimiento de las partículas. El desarrollo como una rama de la matemática moderna se realiza en los siglos XIX y XX a través de notables matemáticos como Birkoff, Cauchy, Riemann, Picard, etc.

Las ecuaciones diferenciales son muy útiles para formular *leyes que rigen fenómenos naturales mediante el lenguaje matemático*, sobre todo las que describen *fenómenos naturales vinculados con la rapidez de cambio*, son expresadas con mayor exactitud mediante derivadas.

Se recuerda que $x' = \dfrac{dx}{dt}$ es la razón de cambio de la variable x con respecto a la variable independiente t.

Por ejemplo:

- A) La velocidad de una partícula a lo largo de una trayectoria rectilínea es proporcional al triple del espacio recorrido.

  Por lo que el modelo matemático de lo expresado es:

  (1) $x' = k\,3x$ ó bien: $\dfrac{dx}{dt} = k\,3x$, donde k es la constante de proporcionalidad

  Se quiere conocer el espacio recorrido en función del tiempo, $x = x(t)$ (función incógnita).

- B) La aceleración de una partícula es cinco veces el espacio recorrido.

  La formulación matemática es:

  (2) $x'' = 5x$ ó bien $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 5x$

  Se quiere conocer el espacio recorrido en función del tiempo, $x = x(t)$ (función incógnita).

- C) Una sustancia radiactiva se desintegra a una velocidad (razón de cambio) que es proporcional a la cantidad presente. Considerando como y: sustancia radiactiva, t : tiempo. La formulación matemática queda expresada:

  (3) $\dfrac{dy}{dt} = k\,y$, donde k es la constante de proporcionalidad

  Se tiene que determinar la cantidad de sustancia radiactiva en función del tiempo: y= y(t) (función incógnita).

Los ejemplos (1), (2) y (3) tienen en común que involucran derivadas de la función incógnita que se quiere determinar. Las ecuaciones (1) y (3) tienen derivadas de primer orden, en cambio la (2) de segundo orden.

Las ecuaciones mencionadas reciben el nombre de **ecuaciones diferenciales.**

Resolver cada una de las ecuaciones diferenciales planteadas consiste en determinar la función incógnita respectiva.

El estudio de las ecuaciones diferenciales constituye una de las ramas de la matemática que tiene más aplicaciones.

2. DEFINICIÓN

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene derivadas o diferenciales, es decir, una relación entre variables independientes, funciones de estas variables y sus derivadas de cualquier orden.

Un ejemplo muy familiar es la Ley de Newton $F = m\,a = m\dfrac{d^2 x}{d\,t^2}$, con t = tiempo, x = posición de la partícula sobre la cual actúa una fuerza F.

¿Cuál es la función incógnita en este caso? Es la posición x en función del tiempo, $x=x(t)$.

La incógnita de una ecuación diferencial es una función, por ello las ecuaciones diferenciales pertenecen al grupo de ecuaciones funcionales. La solución de una ecuación diferencial es encontrar la función incógnita.

El estudio de las ecuaciones diferenciales se puede dividir en:

1. Determinar la ecuación diferencial que describe una situación específica, o sea modelar el problema.
2. Encontrar la solución para esa ecuación.

Para resolver una ecuación diferencial primero hay que identificarla.

Se clasifican:

1- *De acuerdo al número de variables independientes*, *en* ***ordinarias y parciales*** según que la incógnita sea una función de una sola variable o de dos o más variables respectivamente.

Ejemplo: a) $y' = 2x$ ecuación diferencial ordinaria; donde $y = y(x)$ es la incógnita

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ ecuación diferencial parcial (ecuación de Laplace); donde $f = f(x,y)$ es la función incógnita.

Igual que en el caso algebraico, varias ecuaciones diferenciales simultáneas constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, según el número de variables independientes que intervengan en el mismo.

También se clasifican por:

Orden: de una ecuación diferencial, es el orden de la mayor derivada de la función incógnita que en ella aparece.

y

Grado: de una ecuación diferencial, es el exponente de la derivada de mayor orden que figura en ella, una vez que dicha ecuación ha sido racionalizada y no posee denominadores.

	ORDEN	GRADO	CLASE
$y' = y(x)$	1°	1°	Ordinaria
$y' = x^3 y + (sen(x))\, y''$	2°	1°	Ordinaria
$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$	2°	1°	Parcial
$y'^2 + 3y^2 + t = 0$	1°	2°	Ordinaria
$y''' + \frac{3}{y\, y'''} + 8y' = 9$	3°	2°	Ordinaria

En general, simbólicamente una ecuación diferencial se expresa de la forma:

De Primer orden: $F(x,y,y') = 0$

De segundo orden: $F(x,y,y', y'') = 0$

De orden n: $\boldsymbol{F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0}$.

Cuando tengamos una ecuación de la forma $g(x,y,y') = 0$ diremos que está en forma implícita, o si podemos despejar $y' = f(x,y)$ se obtiene la forma explícita o normal.

Resolver una ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ **significa hallar todas las funciones explícitas** $y = f(x)$ **o implícitas** $G(x,y) = 0$**, que la satisfacen, definidas en un intervalo I** $\subset \Re$.

I es el intervalo de definición o de existencia o dominio de la **función solución**. Puede ser un intervalo abierto o cerrado.

Solución de una ecuación diferencial es una función que no contiene derivadas y que satisface dicha ecuación; es decir al sustituir la función y sus derivadas en la ecuación diferencial resulta una identidad.

Las soluciones suelen llamarse también integrales, cuando éstas se obtienen mediante el cálculo de primitivas o también por el cálculo de integrales definidas, diremos que la ecuación se resuelve o integra por cuadraturas. Las gráficas de las soluciones se llaman **curvas integrales**.

Formalmente la función $y=u(x)$ es una **solución** de la ecuación diferencial $F(x,y,y',y'',.........,y^{(n)})=0$ en el intervalo I, cuando las derivadas $u',u'',.........,u^{(n)}$ existen en I y $F(x,u,u',u'',.........,u^{(n)})=0$ para todo x del intervalo I.

La ecuación diferencial más sencilla se presenta cuando $f(x,y)$ es independiente de y. En tal caso, se tiene: $y' = Q(x)$

cuya solución general, resolver la antiderivada o integral indefinida, es

$$y=\int Q(x)\ dx = q(x) + C$$

se denomina **solución general**, vemos que contiene **una constante arbitraria C**, la cual determina una **familia de curvas monoparamétricas**, dependiendo del valor que toma la constante será la curva elegida.

Definición: Solución general *de una ecuación diferencial es la función que satisface a la ecuación y que contiene una o más constantes arbitrarias*

Se puede determinar el valor de la constante conociendo las coordenadas (x_0, y_0) de un punto de la curva solución buscada. Luego reemplazándola en la solución general se obtiene una función denominada solución particular.

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} Q(x)\ dx \quad \text{de donde} \quad y = y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(x)\ dx \ \text{, con} \quad C = y_0 \cdot$$

***Definición: Solución particular** de una ecuación diferencial es la función que satisface la ecuación y cuyas constantes arbitrarias toman un valor específico.*

Se define como **problema de valor inicial y problemas de valor frontera** a aquellos en que la ecuación diferencial se resuelve sujeta a unas condiciones dadas que la función desconocida debe satisfacer.

Problema de valor inicial:

Es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas en un valor de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones iniciales.

Problemas de valor frontera:

Es un problema que busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida, especificadas en dos o más valores de la variable independiente. Tales condiciones se llaman condiciones de frontera.

-La función primitiva resultante, o función solución de una ecuación diferencial, puede tener por las condiciones iniciales o de frontera diversos valores, diferenciándose una solución de otra en el parámetro, definiéndose este conjunto de soluciones familia de soluciones monoparamétrica (en el caso de existir sólo un parámetro) o familia de soluciones de dos o más parámetros (en el caso de existir más de un parámetro).

Ejemplo: Movimiento lineal

Suponiendo que una partícula se mueve a lo largo de una recta de manera que su velocidad en el instante t es $2\ sen\ t$. Determinar su posición en ese instante t.

Solución: Si $y(t)$ representa la posición en el instante t, medida a partir del punto inicial, la derivada $y'(t)$ representa la velocidad en el instante t.

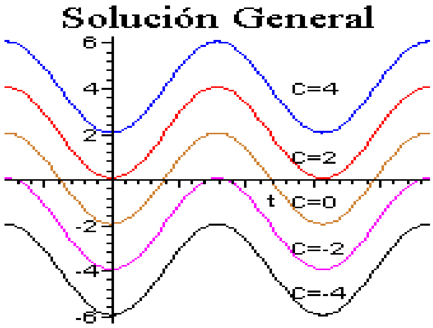
La formulación matemática es: $y'(t) = 2\ sen\ t$.

La solución se obtiene integrando: $y(t) = 2\int sen\,t\ dt + C = -2\cos t + C$ (1)

Se obtiene una **familia monoparamétrica** de curvas, y es todo cuanto podemos decir acerca de $y(t)$ a partir únicamente del conocimiento de la velocidad, algo más de información es necesaria para fijar la función de posición. Se puede determinar C si se conoce el valor de y en un cierto instante.

Por ejemplo, si $y(0) = 0$, reemplazando en (1) obtenemos que $C = 2$ y la función posición es $y(t) = 2 - 2\cos t$ que es **una** curva de la familia (1).

Si $y(0) = 2$ entonces $y(t) = 4 - 2\cos t$ es **otra** curva de la familia (1).



Ejemplo: Hallar las curvas para las cuales en cada punto (x,y) la pendiente de la tangente sea igual a la abscisa. Determine la curva que verifica que $y(0) = 1$.

Solución:

Modelado del problema: $y' = x$ o lo que es igual $\dfrac{dy}{dx} = x$,

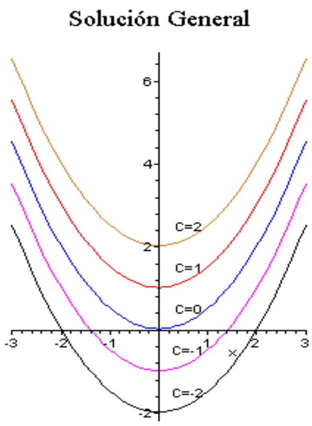
$$dy = x\,dx$$

Integrando se obtiene:

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

Las curvas integrales son infinitas parábolas de eje vertical (**solución general** de la ecuación dada). Por cada punto del plano pasa una y sólo una de estas curvas.

Así, para $y(0) = 1$, obtenemos que $C = 1$ por lo que $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$, **solución particular** que pasa por el punto $(0,1)$.



En cada uno de los ejemplos anteriores la solución contiene **una constante arbitraria** por lo que es una familia **monoparamétrica** de curvas o bien un haz de curvas. Las que pueden indicarse como $G(x,y,C) = 0$ ó $y = f(x,C)$ denominadas solución general.

En muchos problemas es necesario seleccionar entre todas las soluciones la que tiene un valor asignado en un cierto punto. *El valor asignado se denomina **condición inicial** y la solución encontrada **solución particular y representa una curva de la familia que contiene al punto dado como condición inicial***.

Geométricamente la solución y = y(x) de una ecuación diferencial es una curva en $\Re^2$. No obstante la curva es a menudo, difícil o incluso imposible de expresar analíticamente en forma explícita y por lo tanto las soluciones de las ecuaciones diferenciales se presentan con frecuencia como funciones definidas implícitamente, $G(x,y,C) = 0$ **.**

3. FUNCIONES PRIMITIVAS

Hay problemas en los cuales se conoce una familia de curvas y se quiere determinar la ecuación diferencial asociada a la misma, es decir resolver el problema inverso a lo visto anteriormente.

Por ejemplo conocemos la expresión de $f(x,y,C) = 0$, que es la función primitiva de $F(x,y,y')= 0$, ecuación diferencial que queremos determinar.

Consideremos el siguiente problema: obtener la ecuación diferencial que satisface a todas las relaciones de la forma

$$y = C\,x^2 + x \qquad (1)$$

en donde C es una constante arbitraria.

El problema consiste en hallar la ecuación diferencial del menor orden posible que es satisfecha por (1) independientemente del valor dado a *C*.

Derivando (1) obtenemos: $y' = 2\,C\,x + 1$ (2)

que es verificada por (1), pues integrando obtenemos $y = C\,x^2 + x$ siempre y cuando se le dé el mismo valor a la constante *C*.

Para obtener una ecuación que sea verificada por (2) para todo valor de C, eliminamos C entre y e y' .

$$\begin{cases} y = C\,x^2 + x \\ y' = 2\,C\,x + 1 \end{cases}$$ de la segunda ecuación obtenemos $$C = \frac{y' - 1}{2x}$$

Luego, reemplazando en (1) $y = \left(\frac{y' - 1}{2x}\right) x^2 + x$, se obtiene $2y = y' x^2 - x^2 + 2x$.

Es la ecuación diferencial buscada independiente del valor de C.

Con mayor generalidad, si partimos de una relación de la forma

$$f(x,y,C) = 0$$

en donde C es una constante arbitraria, y nos planteamos el problema de obtener la ecuación diferencial del menor orden posible que tenga las soluciones $f(x,y,C) = 0$ independientemente del valor atribuido a C. Derivando $f(x,y,C) = 0$ se obtiene.; una ecuación que contiene y'; si tal ecuación no contiene a C, será la ecuación diferencial buscada, pero si contiene a C, se elimina C entre:

$f(x,y,C) = 0$ y $f(x,y,y',C) = 0$, obteniendo una expresión de la forma: $F(x,y,y') = 0$.

Se dice que $f(x,y,C) = 0$ es la **función primitiva** de $F(x,y,y') = 0$.

Se observa que una primitiva que incluye una constante arbitraria origina una ecuación diferencial de primer orden.

Si el problema consiste en deducir una ecuación diferencial que admita como primitiva a una relación de la forma $f(x,y,C_1,C_2) = 0$, es decir, hallar la ecuación diferencial del menor orden posible que sea verificada por cualquiera de las relaciones $f(x,y,C_1,C_2)=0$ independientemente de C_1 y C_2, se procede derivando $f(x,y,C_1,C_2) =0$ dos veces consecutivas:

$f(x,y,y',C_1,C_2) = 0$

$f(x,y,y',y'', C_1,C_2) = 0$ eliminando C_1 y C_2

y con las tres ecuaciones se obtiene una relación de la forma: $F(x,y,y',y'') = 0$.

La eliminación de C_1 y de C_2 exige disponer de tres ecuaciones, y así es necesario efectuar dos derivadas sucesivas. Por consiguiente, una primitiva que contenga dos constantes arbitrarias origina una ecuación diferencial de segundo orden.

Si la primitiva dada tiene "n" constantes arbitrarias debemos derivar n veces consecutivas y eliminar las constantes, obteniendo una ecuación diferencial de orden n.

4. SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL

Dada la primitiva, es sencillo encontrar la ecuación diferencial; el problema inverso es más complicado.

Antes de resolver una ecuación diferencial es conveniente saber si la solución existe y si hay sólo una solución de la ecuación que satisfaga una condición inicial, es decir, si las soluciones son únicas.

La existencia y unicidad de las soluciones también afecta a la elaboración de modelos matemáticos. Supóngase que estamos estudiando un sistema físico completamente determinado por ciertas condiciones iniciales, pero el modelo matemático propuesto involucra una ecuación diferencial que no tiene solución única. Esto hace surgir de inmediato la pregunta de si el modelo matemático representa adecuadamente al modelo físico.

¿Bajo qué condiciones se puede garantizar que una ecuación diferencial de primer orden tenga una y sólo una solución?

El siguiente teorema establece las condiciones suficientes para asegurar la existencia y unicidad de la solución:

TEOREMA DE EXISTENCIA DE LA SOLUCIÓN:

Sea una ecuación diferencial $y' = F(x,y)$, con *F(x,y)* continua y uniforme en cierta región del plano *xy (R)*, si para todos los puntos (*x,y*) interiores a dicha región existe F_y y es continua, entonces la ecuación admite una familia de soluciones *f(x,y,C) = 0* (solución general), tal que un par de valores arbitrarios (x_0, y_0), correspondientes a un punto de la región, determina un valor único de *C* obteniendo la solución particular.

Dicho de otra manera, la condición para la existencia de soluciones es:

- Continuidad de F(x,y) en R.

Y las condiciones para la unicidad son:

- Continuidad de F(x,y) en R.
- Continuidad de $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ en R

> Suele decirse que y(x) satisface una EDO para indicar que y(x) es una solución de la EDO

Estas condiciones son suficientes pero no necesarias, porque puede existir una solución única que satisface $y(x_0) = y_0$ pero que no cumple alguna de las condiciones.

Este teorema no nos dice como obtener la solución.

Comenzamos con los métodos de solución de ecuaciones diferenciales.

5. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden más usadas en ingeniería se pueden clasificar en las siguientes:

1. Ecuaciones diferenciales de variables separables
2. Ecuaciones diferenciales homogéneas
3. Ecuaciones diferenciales exactas
4. Factor integrante
5. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y primer grado
6. Ecuaciones de Bernoulli .

En nuestro curso se desarrollaran 1, 3 y 5.

5.1 - VARIABLES SEPARABLES

Una ecuación diferencial de primer orden y primer grado es de la forma $y' = f(x,y)$ o lo que es equivalente $M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$, lo que implica que $y' = M(x,y) / N(x,y)$.
Puede ocurrir que $M(x,y)$ sólo dependa de la variable x además que $N(x,y)$ dependa sólo de y, o sea que $X(x)\, dx + Y(y)\, dy = 0$. **Luego encontramos la solución por una simple integración**

$$\int X(x)\, dx + \int Y(y)\, dy = C$$

Se puede tener el siguiente caso $R(x)\, G(y)\, dx + M(y)\, N(x)\, dy = 0$. Dividiendo ambos miembros por $G(y)\, N(x)$ se obtiene

$$(R(x) / N(x))\, dx + (M(y) / G(y))\, dy = 0$$

Integrando, tenemos la solución buscada. Este proceso se denomina **separar las variables**.

En resumen, una ecuación diferencial de variables separables tiene la forma:
$f(x)\, dx + g(y)\, dy = 0$, donde cada diferencial tiene como coeficiente una función de su propia variable, o una constante. El método de solución es simple integración.

Ejemplo: obtenga la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 dx + \left(\dfrac{1}{1+y^2}\right) dy = 0$

por simple integración su solución es $x^3 + arc\ tg\ y = C$.

b) $y(1 - x)\,dx + x^2(1 - y)\,dy = 0$, encontrar la solución particular que pasa por el punto (1,1).

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial (x+1) y' = 4 y, con la condición inicial y(0) = 4.

Solución: se realiza con Maple. (Ver el uso de Maple en el apartado ANEXO ECUACIONES DIFERENCIALES)

$$eq1 := (x+1)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - 4\,y(x)$$

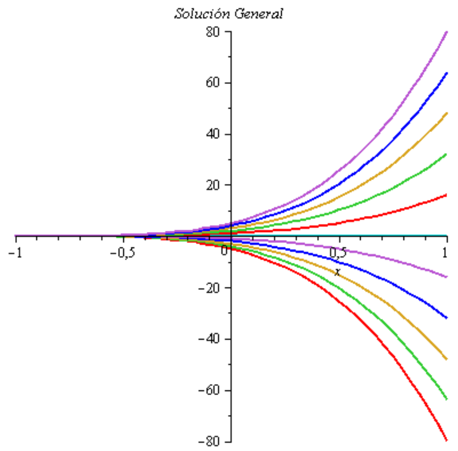
$T := y(x) = \_C1\,(x+1)^4$ Solución General

$F1 := y(x) = (x+1)^4$ Solución Particular

Se realizan las gráficas de ambas soluciones.

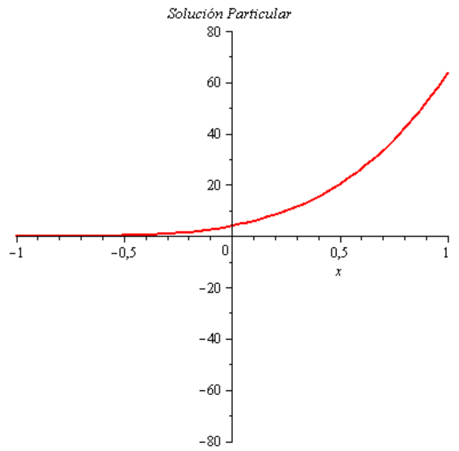
Solución General

$T := y(x) = \_C1\,(x+1)^4$



Solución Particular

$F1 := y(x) = (x+1)^4$



Observación

La constante de integración no pierde su carácter arbitrario, tomar un valor cualquiera, si está afectada por funciones. Así, $ln\ C = C$ porque el logaritmo natural de una constante también es una constante; del mismo modo se puede usar $e^C = C$, $C^2 = C$, $sen\ C = C$, etcétera.

Cuando no pueden separarse las variables de una ecuación y no pueden agruparse en términos, en cada uno de los cuales estén las mismas variables, habrá que usar otros métodos para encontrar la solución.

5.2 - ECUACION DIFERENCIAL EXACTA

Recordemos

Dada la función z = f(x,y) se dice que la expresión $dz = f_x\, dx + f_y dy$ es su diferencial total. Se supone que estas derivadas parciales son funciones de las variables independientes x, e y, y continuas en una región R del plano xy.

Entonces:

Una ecuación del tipo ***M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0*** se llama diferencial exacta si su primer miembro es la diferencial total de una función de dos variables $U(x,y) = C$.

- ✓ Encontrar la solución de una ecuación diferencial exacta es hallar una función $f\,(x, y)$ tal que su diferencial total sea exactamente la ecuación diferencial dada.

Se supone que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son continuas, uniformes y con derivadas M_y, N_x continuas en un recinto simplemente conexo, la condición necesaria y suficiente es que $M_y = N_x$.

$dU = U_x\, dx + U_y\, dy = M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$

Luego U(x,y) = C es la integral de la ecuación diferencial dada.

Si M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 es exacta, entonces $M_y = N_x$.

Por ser exacta $M = U_x$ y $N = U_y$

luego $M_y = U_{xy}$, $N_x = U_{yx}$ implica que $M_y = N_x$.

Se verá la forma de construir la función U(x,y), sabiendo que $M_y = N_x$

Si se verifica que $M_y = N_x$ se puede afirmar que $M = U_x$ y $N = U_y$.

Integrando $M = U_x$ respecto de x

$$U(x,y) = \int M(x,y)\, dx + g(y)$$

derivando respecto de y,

$$U_y = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\, dx + g'(y)$$

Luego

$$g'(y) = U_y - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\, dx$$

Por simple integración se encuentra g(y), siempre que el segundo miembro sea independiente de x. Demostraremos esta última afirmación:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U_y - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\ dx\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\ dx\right) = \leq$$

$$= N_x - \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial}{\partial x} M(x,y)\ dx = N_x - M_y = 0$$

Por lo tanto el paréntesis es independiente de x, sólo es función de y.

Luego, la función

$$g(y) = \int \left(U_y - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\ dx\right) dy$$

Una vez conocida *g(y)* se obtiene

$$U(x,y) = \int M(x,y)\ dx + g(y) = C$$

solución general de la ecuación dada.

Observe la forma de la solución. Es $f(x, y) = c$.

Método de solución:

1. **Dada una ecuación diferencial se ve si es exacta.**
2. Se aplica la definición: $U_x = M(x, y)$
3. Se integra con respecto a x o con respecto a y

   $U = \int M\ dx + g(y)$
4. Al resultado se lo deriva con respecto a y:

   $U_y = \frac{\partial}{\partial y}\int M\ dx + g'(y)$
5. Se iguala el nuevo resultado a N. Se despeja g'(y)
6. Se integra por última vez la ecuación para obtener g(y).

   Se completa la solución $U = \int M\ dx + g(y) = C$

5.2.1. Solución de una Ecuación Diferencial Exacta utilizando Función Potencial.

De la teoría de integrales curvilíneas se puede determinar la función *U(x,y)* por su diferencial total *dU = M(x,y) dx + N(x,y) dy* , tomando la integral curvilínea de *M(x,y) dx + N(x,y) dy* desde cierto punto fijo (x_0,y_0) hasta un punto de coordenadas variables (x,y), por cualquier camino:

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy$$

Con frecuencia, en calidad de camino de integración es cómodo tomar una línea quebrada, compuesta por dos segmentos paralelos a los ejes coordenados:

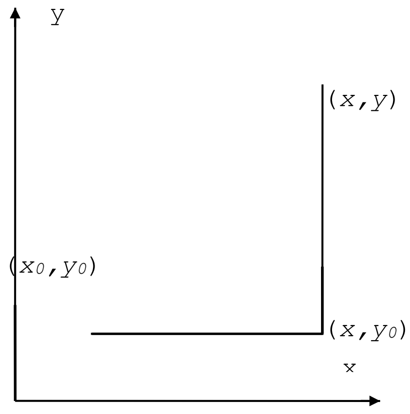


Fig 1

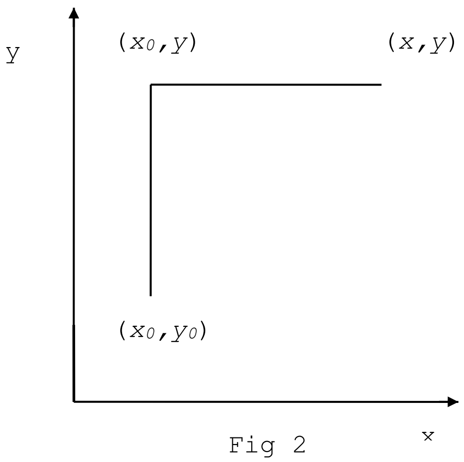


Fig 2

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_o)} M(x,y_o)\,dx+\int_{(x,y_o)}^{(x,y)} N(x,y)\,dy \qquad (\text{ figura } 1)$$

o bien

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_o)}^{(x_o,y)} N(x_o,y)\,dy+\int_{(x_o,y)}^{(x,y)} M(x,y)\,dx \qquad (\text{ figura } 2\ )$$

según el camino que se siga.

De esta forma se puede determinar la función $\boldsymbol{U(x,y) = C}$ tal que su $\boldsymbol{dU(x,y) = 0}$.

Ejemplo: encuentre la solución de $y\,e^x\,dx + e^x\,dy = 0$, que cumple con $y(0) = 1$.

Solución: $M = y\,e^x$ luego $M_y = e^x$

$N = e^x$ luego $N_x = e^x$, por lo que $M_y = N_x$ entonces la ecuación dada es diferencial exacta.

$$U(x,y)=\int M(x,y)\,dx+g(y)=y\,e^x+g(y)\ ; \qquad U_y=e^x+g'(y)$$

como $U_y = N(x,y) = e^x$, reemplazando $e^x = e^x + g'(y)$ lo que implica que $g'(y) = 0$, por lo tanto $g(y) = C$. La solución general es $U(x,y) = y\,e^x = C$.

$U(x,y) = y\,e^x + C = C_1$ luego $y\,e^x = C_1 - C = C$

Comprobación: $U_x = y\,e^x = M$; $U_y = e^x = N$

Como $y(0) = 1$, se obtiene $C = 1$.

La solución particular es $y\,e^x = 1$.

Se deja al lector la comprobación del resultado haciendo uso de las integrales curvilíneas.

5.3 - ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Una ecuación de la forma $\boldsymbol{y' + P(x)\, y = Q(x)}$ (1), en la cual la variable dependiente sólo figura con exponente uno, es llamada forma estándar de la ecuación diferencial ordinaria lineal. Se busca la solución en un intervalo I para el cual P(x) y Q(x) sean funciones continuas.

Al resolver una EDO lineal de primer orden siempre escriba la EDO en la forma normal y luego identifique P(x) y Q(x)

Nos interesa la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea, para lo cual se trabajará con la ecuación homogénea y la no homogénea por separado, utilizando el método de variación de parámetros.

En primer lugar, se verá la ecuación homogénea $y' + P(x)\, y = 0$.

Ella se resolverá primero y se utilizará el resultado para encontrar la solución de la ecuación no homogénea.

$y' + P(x)\, y = 0$ entonces $y' = -P(x)\, y$.

Separando las variables:

$\frac{dy}{y} = -P(x)\; dx$, integrando resulta $\ln y = \int -P(x)\, dx + C$

por lo tanto $y = e^{-\int P(x)dx} . e^{C}$ (2)

Para obtener la solución de la ecuación no homogénea se considera el caso especial de $C = 0$, se obtiene una solución particular de (2):

$u = e^{-\int P(x)\; dx}$ llamado factor integrante de la ecuación lineal.

Utilizando la sustitución de Lagrange $y = u\, v$, suponiendo que y es solución general de la ecuación no homogénea y que u es la solución particular hallada anteriormente, se encontrará la expresión de la función v.

$y' = u'v + u\, v'$ reemplazando en (1) se obtiene

$u'v + u\, v' + P(x)u\, v = Q(x),$

$v\, (u' + P(x)u) + u\, v' = Q(x)$

$u' + P(x)u = 0$ por ser u solución particular de la ecuación homogénea.

$u\, v' = Q(x)$ entonces $dv = u^{-1}\, Q(x)\, dx$

$v = \int u^{-1} Q(x)\ dx + C \quad , v = \int e^{\int P(x)\ dx} Q(x)\ dx + C$

Luego, **la solución general de (1) es**:

$$y = e^{-\int P(x)\ dx}\left[\int e^{\int P(x)\ dx} Q(x)\ dx\ + C\right]$$

Ejemplo: Resolver $y' + (x^{-1} - 1)\, y = e^{2x}\, x^{-1}$

Solución:

$P(x) = (x^{-1} - 1)$ entonces $\int P(x)dx = \int (x^{-1} - 1)dx = \ln x - x$

Luego: $y = e^{-(\ln x - x)}\left[\int e^{(\ln x - x)}\, e^{2x}\, \frac{1}{x}\, dx + C\right]$ operando se obtiene:

$y = e^{-(\ln x - x)}\left[e^{x} + C\right] = x^{-1} e^{x}\left[e^{x} + C\right]$ solución general de la ecuación diferencial.

6- APLICACIONES DE ECUACIONES DIF. LINEALES DE PRIMER ORDEN

I) GEOMETRIA

1) La pendiente de una curva en cualquier punto (x, y) es x + 2y. Determinar la ecuación de dicha curva si, además sabemos que pasa por el origen de coordenadas.

La pendiente se representa por y'

$$\frac{dy}{dx} = x + 2y$$

La condición que conocemos es que la curva pasa por el origen, entonces y(0) = 0

$\frac{dy}{dx} - 2y = x$ es una EDO de la forma $y' + P(x) = Q(x)$.

La solución es:

$y = e^{-\int 2dx}\left[\int e^{\int 2dx} . x\ dx + C\right]$

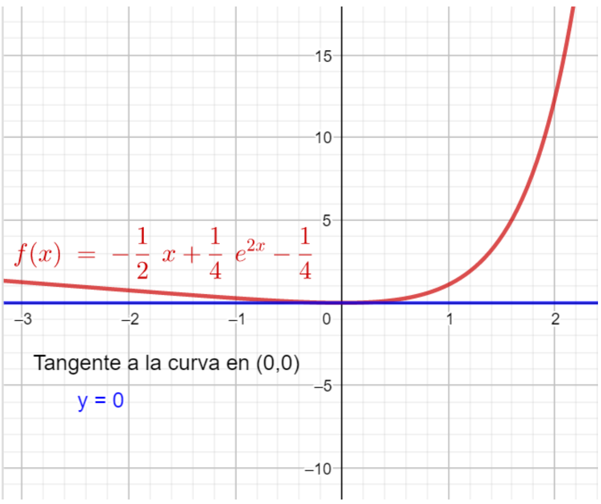
$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + C\, e^{2x}$ Sol. general de EDO

Con y(0) = 0

$0 = 0 - \frac{1}{4} + C$, C = ¼

La curva buscada tiene por ecuación:

$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{2x}$ Sol. Particular de EDO



2) Supongamos que una gota esférica se evapora a una velocidad proporcional a su superficie; si al principio el radio de la gota es 2 mm, y al cabo de 10 minutos es de 1 mm, hallar una función que relacione el radio r con el tiempo t.

Volumen de la esfera: $V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$ r = radio de la gota

Superficie de la esfera: $S = 4\,\pi\, r^2$

La variación del volumen respecto al tiempo es: $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi\; 3\, r^2 \frac{dr}{dt}$

La gota se evapora proporcional a su superficie: $\frac{dV}{dt} = k.S$

Sustituyendo: $k.4\,\pi\, r^2 = \frac{4}{3}\pi\; 3\, r^2 \frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = k \quad \rightarrow \quad dr = k\, dt$$

Solución general: $r = k\, t + C$

Condiciones iniciales: $\begin{cases} t = 0\ , & r = 2 \\ t = 1\ , & r = 1 \end{cases}$

Reemplazando las se obtienen k y C

Solución particular de EDO: $r(t) = -\frac{1}{10}\, t + 2$, función que relaciona el radio de la gota con el tiempo

II) TRAYECTORIAS ORTOGONALES

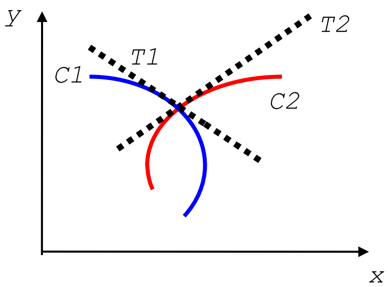
Recuerde de Geometría Analítica que dos rectas *L1* y *L2* , que no son paralelas a los ejes coordenados, son perpendiculares si y solo si sus pendientes respectivas satisfacen la relación $m_1.m_2 = -1$.

En general, dos curvas *C1* y *C2* se dice que son ortogonales en un punto, si y solo si sus tangentes *T1* y *T2* son perpendiculares en el punto de intersección.

En algunas aplicaciones aparecen dos familias de curvas planas que son mutuamente ortogonales, esto es, cada curva de una de las familias es ortogonal en todos sus puntos a cada curva de la otra familia.

Las curvas de una familia *G(x,y,C1)* = 0 que cortan ortogonalmente todas las curvas de otra familia *F(x,y,C2) = 0,* se dice que las familias son **trayectorias ortogonales.**

Los coeficientes angulares y_1' *e* y_2' de las tangentes a las curvas de la familia dada y a las trayectorias ortogonales buscadas, deben satisfacer en cada punto la condición de ortogonalidad entre rectas: $y_2' = -\frac{1}{y_1'}$



Definición: Trayectorias ortogonales son las curvas que se intersecan formando un ángulo recto. Si una familia de curvas tiene la ecuación $F(x, y, y') = 0$, la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales a ella es otra familia de la forma: $F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$

Ejemplo: encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $y = kx^2$.

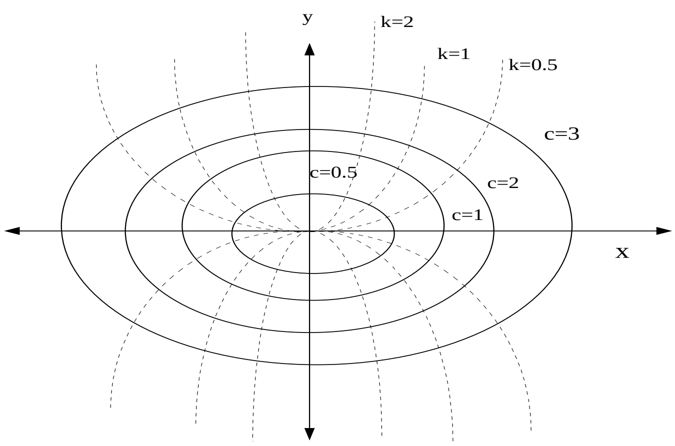
Solución:

- **Derivando** la ecuación dada: $y' = 2\,k\,x$, y **despejando *k*** resulta: $k = \dfrac{y'}{2x}$
- **Reemplazando *k*** en la familia de parábolas se obtiene $y = \dfrac{y'}{2x}\,x^2$. Luego $y' = 2\,\dfrac{y}{x}$.
- **Aplicando condición de ortogonalidad** $y'_2 = -\dfrac{1}{y'_1}$, se tiene

$y' = -\dfrac{x}{2y}$ es la ecuación diferencial de la familia ortogonal a la dada. La que puede expresarse como:

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{2y}$, separando variables $2y\,dy = -x\,dx$, ó $x\,dx + 2y\,dy = 0$.

- **Integrando**: $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = C$ **,** se obtiene una familia de elipses, ortogonal a la familia de parábolas dadas.



Las trayectorias ortogonales aparecen naturalmente en la elaboración de cartas meteorológicas y en el estudio de electricidad y magnetismo. Por ejemplo, en el campo eléctrico que rodea a dos cuerpos de carga opuesta, las líneas de fuerza son perpendiculares a las curvas equipotenciales (esto es, líneas a lo largo de las cuales el potencial es constante).

III - APLICACIONES FISICAS:

La matemática nos permite poner en símbolos lo que nos rodea, nos conduce a través de la aplicación rigurosa de sus leyes y de la lógica a soluciones de los problemas planteados. El proceso de elaboración de modelos matemáticos comprende:

1. La formulación de un problema en términos matemáticos (esto es construir un modelo matemático). Es establecer la ecuación diferencial que traduce fielmente el fenómeno a estudiar.
2. El análisis y solución del problema matemático, que implica clasificar y resolver la ecuación diferencial planteada con las condiciones del problema.
3. La interpretación de los resultados matemáticos en el contexto del problema original.

Un modelo matemático satisfactorio ha de cumplir dos requerimientos ser: suficientemente detallado como para representar la situación real con relativa exactitud y debe ser bastante sencillo para permitir un análisis matemático práctico.
A continuación, se detallan algunas aplicaciones físicas.

- **Desintegración radiactiva:**

Aunque los distintos elementos radiactivos presentan diferencias notables en sus coeficientes de desintegración, todas las sustancias tienen la propiedad común de que la **velocidad de desintegración radiactiva es proporcional a la cantidad x de sustancia aún no desintegrada**.

Hallar la dependencia de x respecto al tiempo t, si en el momento inicial para $t = t_0 \quad es \quad x = x_0$.

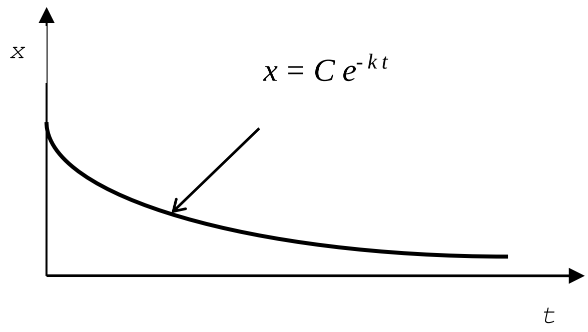
Suponemos conocido el coeficiente de proporcionalidad k, llamada constante de desintegración. La ecuación diferencial del proceso tendrá la forma:

$$x'(t) = -k\,x \qquad (1)$$

El signo menos indica que x decrece cuando t aumenta ($k > 0$).

Separando variables e integrando, se obtiene: $\ln x = -kt + C$

por lo tanto**:** $x = C e^{-kt}$ es la solución general de la ecuación dada.



Aplicando las condiciones iniciales en: $t = t_0$ *es* $x = x_0$, $x_0 = C\,e^{-k\,t_0}$ implica $C = x_0\,e^{k\,t_0}$, luego reemplazando en la solución general se obtiene: $x = x_o\ e^{-k\,(t - t_o)}$ **,** obteniendo así la solución particular. Podemos determinar el período de desintegración *t* (o sea, el tiempo en el cual se desintegra la mitad de x_o).

Para un *t* genérico, $t = t$ $x = \frac{1}{2}x_0$, llamando $t = t - t_o$ y reemplazando en la solución particular

$\frac{1}{2}x_0 = x_0\,e^{-k\,t}$, $k\,t = ln\ 2$ implica $t = [(ln\ 2)/k\ ] + t_o$.

No solamente la desintegración radiactiva, sino cualquier otra reacción monomolecular, en base a la **Ley de Acción de Masas**, se describen por la ecuación $x'(\,t\,) = -k\,x$, donde *x* es la cantidad de sustancia que aún no ha reaccionado.

La ecuación $x'(\,t\,) = k\,x$ que se diferencia de la anterior sólo por el signo del segundo miembro, describe muchos procesos de "**reproducción**" (o multiplicación), por ejemplo, la reproducción de la cantidad de neutrones en las reacciones nucleares en cadena, o la reproducción de la cantidad de bacterias, suponiendo que se encuentran en un ambiente óptimo y que por ello, la velocidad de su crecimiento sea proporcional a la cantidad de bacterias presentes.

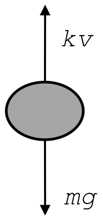
La solución de la ecuación $x'(\,t\,) = k\,x$ que satisface la condición de que $x(t_o) = x_o$ tiene la forma $x = x_o\,e^{\,k\,(t - t_o)}$, y a diferencia de la solución de (1), $x(t)$ no disminuye, sino que crece exponencialmente con el tiempo.

- **Caída de un cuerpo en un medio resistente**:

Un cuerpo en reposo de masa "*m*" es lanzado a gran altura en la atmósfera terrestre. Supuesto que cae en línea recta y que las únicas fuerzas que actúan sobre él son la de la gravedad terrestre ($m\,g$, donde g es la aceleración de la gravedad, supuesta constante) y una fuerza resistente (debida a la resistencia del aire) que es proporcional a su velocidad; se trata de estudiar el movimiento resultante.

Sea $x = x(t)$ la distancia recorrida por el móvil en el instante t, y sea $v = x' = x'(t)$ su velocidad. De la hipótesis de que parte del reposo se deduce que $x'(0) = 0$.

Hay dos fuerzas que actúan sobre el cuerpo, una descendente $m\,g$ debida a su peso y otra ascendente $-k\,v$.(debida a la resistencia del aire), donde k es una constante positiva.



La segunda ley de Newton dice que la suma de las fuerzas que actúan en un cuerpo en cada instante es igual al producto de su masa "m" por su aceleración. Si se indica con ***a*** la aceleración en el instante t, entonces $a = v' = x''$.

Luego: $m\,a = m\,g - k\,v$.

Esta se puede considerar como una ecuación diferencial de segundo orden si se toma la función desplazamiento x, o de primer orden si se toma la función velocidad v.

Como ecuación de primer orden en v, es lineal y puede escribirse de la forma $m\,v' = m\,g - k\,v$ ó $v' + (k/m)\,v = g$, esta ecuación es el modelo matemático del problema con:

$$P(t) = \frac{k}{m} \quad , \quad e^{\int P(t)dt} = e^{\frac{k}{m}t} \quad , \quad e^{-\int P(t)dt} = e^{-\frac{k}{m}t} \qquad \text{y}$$

$$\int Q(t)e^{\int P(t)dt}\,dt = \int g\,e^{\frac{k}{m}t}\,dt = g\,\frac{m}{k}\,e^{\frac{k}{m}t} \quad , \quad v = e^{-\int P(t)dt}\,[\int Q(t)e^{\int P(t)dt}\,dt + C\,]$$

$$v = g\,\frac{m}{k} + C\,e^{-\frac{k}{m}t} \qquad \text{solución general}$$

Como en $t = 0, v = 0$

$$0 = g\,\frac{m}{k} + C \quad , \quad C = -\,g\,\frac{m}{k} \qquad \text{luego}$$

$$v = \frac{m\,g}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\,) \qquad \text{es la solución particular que verifica} \quad v(0) = 0.$$

Como $v = x'$, podemos conocer el desplazamiento por una simple integración

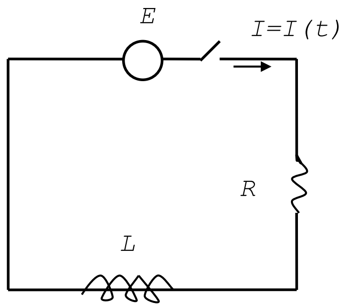
$$x = \frac{m\,g}{k}\,t + g\,\frac{m^2}{k^2}\,e^{-\frac{k}{m}t} + C$$

Como en $t = 0, x = 0$ se obtiene $C = -\,g\,\dfrac{m^2}{k^2}$

Luego : $x = \dfrac{m}{k}\,g\,t + g\,\dfrac{m^2}{k^2}\,[e^{-\frac{k}{m}t} - 1]$

- **Circuitos eléctricos:**

La 2º Ley de Kirchoff dice: el voltaje proporcionado por la fuerza electromotriz (FEM) es igual a la suma de las caídas del voltaje.



Ejemplo: Consideremos un circuito eléctrico formado por una fuente de voltaje *E* (batería o generador), una resistencia *R* y una inducción *L*, conectadas en serie. Según la Ley de Kirchoff, la fuerza electromotriz proporcionada (*E*) es igual a la suma de la caída de voltaje en el inductor
(*L dI/dt*) y la caída de voltaje en la resistencia (*R I*).

Luego: $L\,(dI/dt) + R\,I = E$ es una ecuación diferencial lineal, donde $I = I(t)$ es la corriente eléctrica, nuestra función incógnita. Se puede expresar de la forma: $I'(t)+\left(\frac{R}{L}\right)I(t)=\frac{E}{L}$, su solución general es

$$I = e^{-\int \frac{R}{L}dt}\,[\,\int \frac{E}{L} e^{\int \frac{R}{L}dt}\,dt + C\,] \qquad \text{Solución General}$$

Si por ejemplo, *FEM* = 100 voltios

R = 10 ohmios

L = 2 henrios

El interruptor se cierra para $t = 0$. Establezca una ecuación diferencial para la intensidad de corriente y determine ésta en el instante *t*.

$$2\frac{dI}{dt} + 10\,I = 100 \ , \qquad \frac{dI}{dt} + 5\,I = 50 \ , \qquad luego$$

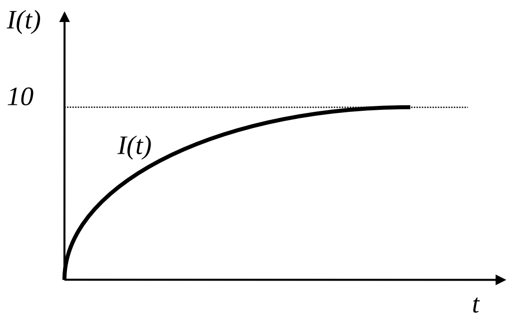
$$I = e^{-5t}\ [\int 50\ e^{5t}\ dt\ +\ C\ ]\ =\ e^{-5t}\ [10\,e^{5t}\ + C\ ]$$

En $t = 0$ $I = 0$, por lo que $C = -10$

Así la **solución particular** que verifica I(0) = 0 es:

$$\boldsymbol{I = 10(1 - e^{-5t})}.$$

La gráfica correspondiente es:



Ahora, consideraremos un circuito eléctrico formado por una batería o generador E [voltios], conectado en serie con una resistencia R [ohmio] y un condensador C [faradios].

La caída de voltaje en una resistencia es Q/C, de modo que, según la Ley de Kirchoff:

$$R\,I + (Q/C) = E.$$

En esta forma no es una ecuación diferencial, pero si advertimos que la intensidad de corriente es la relación de variación de la carga en el tiempo, es decir, $I = dQ/dt$ se obtiene la ecuación diferencial para la carga instantánea: $R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{Q}{C} = E$

7. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR A UNO

Una ecuación diferencial de orden "*n*" puede escribirse como $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0$, o bien resuelta respecto a la n-ésima derivada $y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})$

El teorema de existencia y unicidad de la solución, análogo al teorema correspondiente relativo a la solución de ecuaciones de primer orden es:

Teorema: Si en la ecuación $y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})$ la función $f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})=0$ y sus derivadas parciales respecto a las variables $y',y'',\ldots,y^{(n-1)}$ son continuas en un cierto dominio que contiene a los valores $x = x_o$, $y = y_o$, $y'= y'_o,\ldots,y^{(n-1)} = y_o^{(n-1)}$ existe una solución única $y = y(x)$ de la ecuación que satisface las condiciones iniciales:

$y(x_o) = y_o$

$y'(x_o) = y'_o$

....

$y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}$

Si se considera el caso de una ecuación de 2º orden: $y'' = f(x,y,y')$, las condiciones iniciales son: para $x = x_o$, $y = y_o$, $y' = y'_o$ donde x_o , y_o , y'_o son números dados.
El significado geométrico de estas condiciones es el siguiente:

Por un punto dado del plano (x_o,y_o) pasa una sola curva solución cuya tangente es de pendiente y'_0 . De aquí se deduce, que si damos diferentes valores a y'_o, conservando constante (x_o,y_o) , obtenemos una infinidad de curvas integrales con distintos ángulos de inclinación que pasan por el punto dado.

Definición: se llama ***solución general*** de una *ecuación diferencial de n-ésimo orden,* $f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})=0$ a ***una función*** $y=g(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$ que depende de n constantes arbitrarias, de modo que:

a) satisfaga la ecuación cualquiera que sean los valores de las constantes;

b) para las condiciones iniciales dadas se determina el valor de las constantes.

Una relación de la forma $H(x,y,C_1,C_2,\ldots,C_n) = 0$ que define la solución general de manera implícita, se llama integral general de la ecuación diferencial.

Toda función obtenida de la solución general para valores concretos de ***las constantes C_1, C_2,..., C_n***, se llama ***solución particular***.

7.1. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN N

Las ecuaciones diferenciales lineales de orden n tienen la forma:

$$P_o \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n\, y = Q(x)$$

donde los P_i , con i = 1, ...,n y Q pueden ser constantes o funciones de x, con P_o distinto de cero y n un número natural.

En el caso de ser constantes se llamará $P_i = a_i$, i = 1,2,.....,n; en el caso variable $P_i = P_i(x)$.

En este curso se verán las ecuaciones diferenciales lineales de orden n con **coeficientes constantes.**

La ecuación es:

$$a_o \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n\, y = Q(x)$$

Vamos a considerar siempre el caso de que $a_o = 1$, pues si no lo es, como $a_o \neq 0$, podemos dividir ambos miembros por a_o, obteniendo:

$$\mathbf{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x)}$$

Conviene reducir la forma de escribir esta ecuación; para ello usamos el símbolo $D = \frac{d}{dx}$, operador diferencial, que tiene sentido sólo aplicado a una función, lo que nos queda:

$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots\ldots + a_{n-1} Dy + a_n y = Q(x$, $\quad [D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} D + a_n] y = Q(x)$

Denominando a $D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} D + a_n = L(D)$, se puede escribir la ecuación diferencial lineal de orden n de la forma:

$$\boxed{L(D)\, y = Q(x)}$$

$L(D)$ es un **operador lineal** y cumple con las dos propiedades:

1) $L(D)\,(u + v) = L(D)u + L(D)v$

2) $L(D)\,(C\,u) = C\,L(D)\,u$

lo cual no es difícil de demostrar desarrollando ambos miembros y mostrando que son iguales.

Basándonos en las propiedades lineales del operador L(D) se va a demostrar los siguientes teoremas:

Teorema 1: Si y_1 es solución de la ecuación lineal homogénea $L(D)y = 0$, entonces $C\,y_1$ es solución, donde C es una constante arbitraria.

Demostración:

Se debe demostrar que $L(D)[C\,y_1] = 0$

Por hipótesis $L(D)\,y_1 = 0$, luego por ser L operador lineal $L(D)[C\,y_1] = C\;L(D)[y_1] = 0$.

Teorema 2: La suma $y_1 + y_2$ de dos soluciones y_1 e y_2 de la ecuación homogénea $L(D)y = 0$, es solución de dicha ecuación.

Demostración:

se debe demostrar que $L(D)\,[y_1 + y_2] = 0$

Por hipótesis $L(D)y_1 = 0$, $L(D)y_2 = 0$

Como $L(D)$ es operador lineal $L(D)[y_1 + y_2] = L(D)y_1 + L(D)y_2 = 0.$

Principio de superposición de soluciones:

Una propiedad útil de la ecuación lineal homogénea $L(D)y = 0$ es que la suma de soluciones cualesquiera de ella, como la combinación lineal con coeficientes arbitrarios constantes de las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación homogénea $L(D)\,y = 0$, $(\sum_{i=1}^{n} ci.yi)$, es solución de dicha ecuación.

Demostración: consecuencia del teorema 1 y teorema 2.

El estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n resulta mucho más sencillo en el caso de que en la función $Q(x)$ del segundo miembro sea idénticamente nula.

Una ecuación diferencial lineal de orden n siempre tiene como solución $\mathbf{y = 0}$, conocida como la solución trivial de la ecuación.

Ejemplo: Las funciones $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$, probar que la función $y = C_1\,e^x + C_2\,e^{-x}$ es solución.

Derivando: $y' = C_1\,e^x - C_2\,e^{-x}$ $y'' = C_1\,e^x + C_2\,e^{-x}$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-x} - (C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-x}) = 0$ verifica.

El principio de superposición de soluciones no se aplica si la ecuación no es homogénea, entonces cuando $Q(x) \neq 0$ resulta de gran utilidad estudiar previamente la ecuación homogénea o complementaria

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} y' + a^n y = 0$$

Nos interesa saber cómo se halla la solución general de $L(D)y = Q(x)$. Para ello veremos el siguiente teorema:

8. TEOREMA FUNDAMENTAL

Si ***y = u(x)*** es **solución particular** de la ecuación $L(D)y = Q(x)$ e ***y = v(x)*** es **solución general** de $L(D)\, y = 0$, entonces ***y = v(x) + u(x)*** es solución general de $L(D)\, y = Q(x)$.

Demostración:

Como ***u*** es solución de $L(D)\, y = Q(x)$, la verifica, por lo tanto $L(D)\, u = Q(x)$, ***v*** es solución de $L(D)\, y = 0$ entonces L(D) v = 0. Dado que L es un operador lineal se verifica:

$L(D)v + L(D)u = \mathbf{Q(x) = L(D)(v + u)}$.

Esto equivale a decir que $y = v(x) + u(x)$ es solución general de la ecuación diferencial completa $L(D)y = Q(x)$.

Hemos visto que una ecuación diferencial lineal de orden n debe contener "n" constantes arbitrarias, pero como ***v(x)*** *es solución general de la ecuación reducida, ya contiene las n constantes* y ***u(x)*** *solución particular, no contiene constantes*. Por lo tanto, la suma ***y = u(x) + v(x)*** **contiene n constantes arbitrarias**.

A la solución general de la ecuación reducida o complementaria la denominamos "solución general de la ecuación homogénea".

Veremos cómo se halla la solución general de la ecuación homogénea y la solución particular de la ecuación completa.

Problemas de valor inicial y valor frontera

Un **problema de valor inicial** para una ecuación diferencial lineal de orden n es:

Dada la ecuación diferencial $y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = Q(x)$, que verifica las siguientes condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ donde y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ son constantes arbitrarias. Se busca una solución en algún intervalo I que contenga al punto $x = x_0$.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $y'' + 16\, y = 0$ sujeta a $y(0) = 0$ e $y'_0(0) = 1$.

Otro tipo de problema consiste en resolver una ecuación diferencial de orden n en la cual la variable dependiente y (o sus derivadas) se especifica en dos *puntos diferentes*. Un problema como:

Resolver $y'' + a_1\, y' + a_2\, y = Q(x)$, sujeta a las siguientes condiciones de borde $y(a) = y_0$, e $y(b) = y_1$ se llama un **problema de valores de frontera .**

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial: $y'' - 2\, y' + 2\, y = 6$ que verifica $y(1) = 0$ e $y(2) = 3$.

9. OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA

Sea la ecuación homogénea de orden n, $y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0$ (2)

ensayamos como solución la sustitución de Euler $y = e^{rx}$, luego reemplazando y con sus derivadas en la ecuación diferencial (2) se obtiene

$e^{rx}\,[r^n + a_1\, r^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}\, r + a_n] = 0$

Puesto que e^{rx} es distinto de cero, resulta:

$$\boxed{r^n + a_1\, r^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}\, r + a_n = 0} \qquad (3)$$

ecuación **algebraica** de grado n, llamada **ecuación característica**, que tiene n raíces que pueden ser reales y distintas, reales coincidentes o complejas conjugadas.

9.1 RAICES REALES Y DISTINTAS

Si la ecuación característica (3) tiene "n" raíces reales y distintas r_1, r_2, ..., r_n, la ecuación diferencial (2) tiene por solución general

$$\boxed{y = c_1\, e^{r_1 x} + c_2\, e^{r_2 x} + \ldots\ldots + c_n\, e^{r_n x}} \qquad (4)$$

donde los c_i, con $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ son constantes arbitrarias.

Esto se cumple siempre que sea una combinación de funciones linealmente independiente.

Ejemplo: Dada la ecuación diferencial $y'' - 2y' - 3y = 0$, si las raíces de la ecuación característica son $r_1 = 3$ y $r_2 = -1$; la solución general es $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$.

9.2 RAICES COINCIDENTES O MULTIPLES

El análisis se hará sobre una ecuación diferencial de segundo orden $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ con raíces $r_1 = r_2 = r$, para luego generalizar estos resultados.

La solución general es $y = (C_1 x + C_2)\, e^{rx}$.

Ejemplo : $y''' - 6\,y'' + 12\,y' - 8\,y = 0$, las raíces de la ecuación característica son $r_1 = r_2 = r_3 = 2$, se ensaya como solución $y = u\, e^{2x}$. Se debe encontrar la expresión de $u = u(x)$

$y' = 2\,u\,e^{2x} + u'\,e^{2x}$, $y'' = 4\,u\,e^{2x} + 4\,u'\,e^{2x} + u''\,e^{2x}$, $y''' = 8\,u\,e^{2x} + 12\,u'\,e^{2x} + 6\,u''\,e^{2x} + u'''\,e^{2x}$

reemplazando en la ecuación diferencial dada

$[\,8u + 12\,u' + 6\,u'' + u''' - 24\,u - 24\,u' - 6\,u'' + 24\,u + 12\,u' - 8\,u]\, e^{2x} = 0$

Finalmente $u''' = 0$, integrando tres veces se obtiene: $u = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

Por lo tanto $y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)\, e^{2x}$ solución general de una ecuación diferencial de tercer orden con raíces múltiples.

Se ensaya como solución un polinomio completo con igual número de términos que el orden de multiplicidad de la raíz, multiplicado por e^{rx} .

9.3 RAICES COMPLEJAS CONJUGADAS

Si $r_1 = a + bi$ y $r_2 = a - bi$, la solución general tiene la forma

$$y = C_1 e^{(a + bi)x} + C_2 e^{(a - bi)x} \qquad (1)$$

Se conoce que $e^{(a + bi)x} = e^{ax} e^{bix}$, aplicando las formulas de Moivre se obtiene:

$e^{(a + bi)x} = e^{ax} [\cos bx + i \operatorname{sen} bx]$, $e^{(a - bi)x} = e^{ax} [\cos bx - i \operatorname{sen} bx]$

reemplazando en (1) ,

$$y = C_1 e^{ax} [\cos bx + i \operatorname{sen} bx] + C_2 e^{ax} [\cos bx - i \operatorname{sen} bx]$$

$y = e^{ax} [(C_1 + C_2) \cos bx + i (C_1 - C_2) \operatorname{sen} bx]$, llamando $A = C_1 + C_2$ y $B = i (C_1 - C_2)$

la solución general de la ecuación dada es:

$$y = e^{ax} [A \cos bx + B \operatorname{sen} bx]$$

Ejemplo: $y'' - 6y' + 13y = 0$, las raíces de la ecuación característica son $r_1 = (3 + 2i)$ y $r_2 = (3 - 2i)$, luego la solución general es:

$$y = e^{3x}\,[\,A \cos 2x + B \,\mathrm{sen}\, 2x\,]$$

La demostración de los tres casos Ver ANEXO ECUACIONES DIFERENCIALES

Ejercicios propuestos:

1) Clasificar y resolver aplicando la metodología vista anteriormente: $y' - 4y = 5x$

2) Resolver:

a) $y'' - 7y' = 0$, $\quad x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$

b) $y'' - 3y' + 4y = 0$

c) $y'' + 4y = 0$, $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

d) $y'' - 8y' + 16 = 0$, $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Dada la ecuación diferencial L(D) y = Q(x) se vio que la solución general es la suma de la solución general de la ecuación homogénea más la solución particular de la completa.

Sabemos encontrar la solución general de la ecuación homogénea, veamos cómo obtener la solución particular de la completa. Para ello se estudiarán los métodos:

a) Método de los coeficientes indeterminados

b) Método de variación de parámetros

10. OBTENCION DE LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION COMPLETA

10.1 METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Este método nos permite hallar una integral particular cuando Q(x) tiene alguna de las siguientes formas:

1) Q(x) es un polinomio

2) Q(x) es una función exponencial

3) Q(x) es una función sen(x) o cos(x)

4) Q(x) es cualquier combinación de estos casos.

I- Q(x) es un polinomio, $Q(x) = P_k(x)$.

Debemos tener cuenta si $r = 0$ es raíz de la ecuación característica o no.

- Si $r = 0$ **no es raíz** de la ecuación característica, ningún término de ***v*** tiene la forma de $P_k(x)$ y se ensaya como solución particular un polinomio del mismo grado que Q(x), con coeficientes a determinar.
- Si $r = 0$ **es raíz** de orden de multiplicidad **h** (número de veces que se repite la raíz) de la ecuación característica $r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_{n-1} r + a_n = 0$, entonces se ensaya como solución particular $u = x^h$ por un polinomio del mismo grado que $Q(x)$, pues en la solución general de la ecuación homogénea ($v=v(x)$) figuran términos de la forma $C_1, C_2 x, ..., C_h x^{h-1}$.

Ejemplos: Resolver:

a) $y'' + y = x^2 + 2x$

La ecuación característica es $r^2 + 1 = 0$ luego las raíces son $r = \pm i$, la solución general de la homogénea es $v = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$.

Como $Q(x)$ es un polinomio, nos preguntamos si ¿$r = 0$ es raíz de la ecuación característica?, en este caso **no lo es**, se ensaya como solución particular de la ecuación completa $u = Ax^2 + Bx + C$, pues $Q(x)$ es un polinomio de segundo grado, derivando $u' = 2Ax + B$, $u'' = 2A$ reemplazando u, u' y u'' en la ecuación diferencial dada, obtenemos

$2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 2x$, por igualación de polinomios

$A = 1$, $B = 2$, $2A + C = 0$, por lo que $C = 2$. La solución particular de la ecuación completa es

$u = x^2 + 2x - 2$, y la solución general es: $y = u + v = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + x^2 + 2x - 2$

b) $y''+ y' = x – 2$

La ecuación característica es $r^2 + r = 0$, luego $r_1 = 0$ y $r_2 = -1$, la solución general de la ecuación homogénea es $v = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Como $Q(x)$ es un polinomio, nos preguntamos si **¿$r = 0$ es raíz** de la ecuación característica? En este caso ***si lo es***, se ensaya como solución particular de la ecuación completa $u = x (A x + B)$, donde h=1 es el orden de multiplicidad de la raíz. Luego $u = x (A x + B) = A x^2 + B x$, derivando $u' = 2Ax + B$, $u'' = 2A$, reemplazando u, u' y u'' en la ecuación diferencial dada, se obtiene:

$2A + 2Ax + B = x - 2$, luego por igualación de polinomios

$2A = 1$

$2A + B = -2$

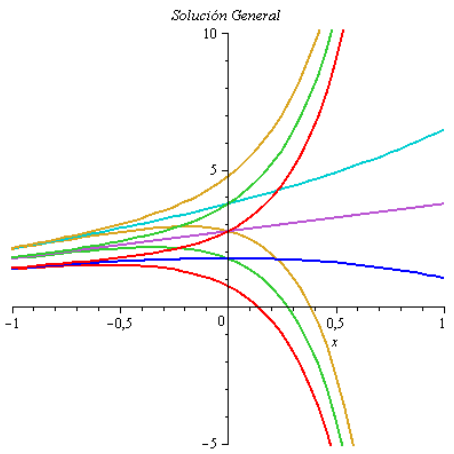
Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $A = ½$, $B = -3$, luego $u = x (½ x - 3)$, la solución general es: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x (½ x - 3)$

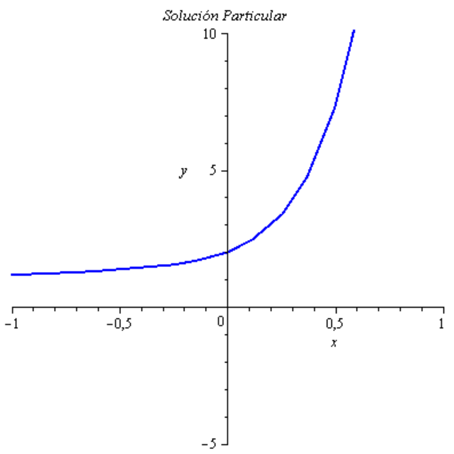
Ejercicio: Resolver la ecuación $y''-5y'+4y=4x+6$ con software científico. Encontrar y graficar la solución general y particular que cumple con $y(0)=2,\, y'(0)=3$.

Solución:

Expresión de ecuación diferencial	$eq := \frac{d^2}{dx^2}y(x) - 5\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + 4y(x) = 4x + 6$
Solución General	$m := y(x) = e^{4x}\_C2 + e^{x}\_C1 + \frac{11}{4} + x$
Condiciones Iniciales	$ini := y(0) = 2, D(y)(0) = 3$
Solución Particular	$F2 := y(x) = \frac{11}{12}e^{4x} - \frac{5}{3}e^{x} + \frac{11}{4} + x$

Las gráficas de las soluciones respectivas son:





La solución completa puede verse en: ANEXO ECUACIONES DIFERENCIALES (Pag 49)

II- Q(x) es una función exponencial, Q(x) = e^{ax}.

Debemos analizar si **a** es raíz de la ecuación característica o no.

- Si a no es raíz de la ecuación característica, se ensaya como solución particular de la ecuación diferencial $u = A\,e^{ax}$
- Si a es raíz de ***orden de multiplicidad h*** de la ecuación característica, entonces se ensaya como solución particular de la ecuación diferencial $u = A\,x^{h}\,e^{ax}$.

Ejemplos: Indique de acuerdo a las raíces de la ecuación característica la forma de la solución particular.

a) $y'' + 9\,y = e^{5x}$ la ecuación característica es $r^2 + 9 = 0$, las raíces $r_{1,2} = \pm\, 3i$, luego $u = A\,e^{5x}$

b) $y''' + 3\,y'' + 3\,y' + y = e^{-x}$ la ecuación característica es $r^3 + 3\,r^2 + 3\,r + 1 = 0,\ r = -1$ raíz triple (orden de multiplicidad 3), luego $u = A\,x^3\,e^{-x}$.

c) $y'' - y = e^x\,(x^2 - 1)$ la ecuación característica es $r^2 - 1 = 0,\ r_{1,2} = \pm\,1$ luego

$u = D\,x\,e^x\,(A\,x^2 + B\,x + C)$

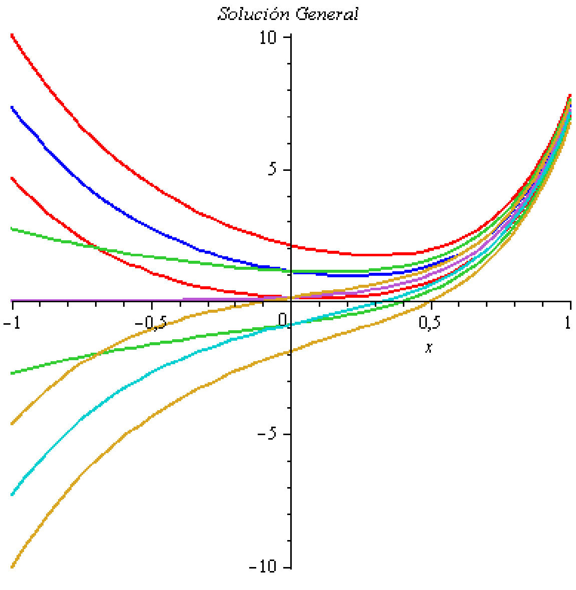
Ejercicio: Resolver utilizando software científico $y''+3y'+2y=4e^{4x}$ con $y(0)=-2,\ y'(0)=3.$

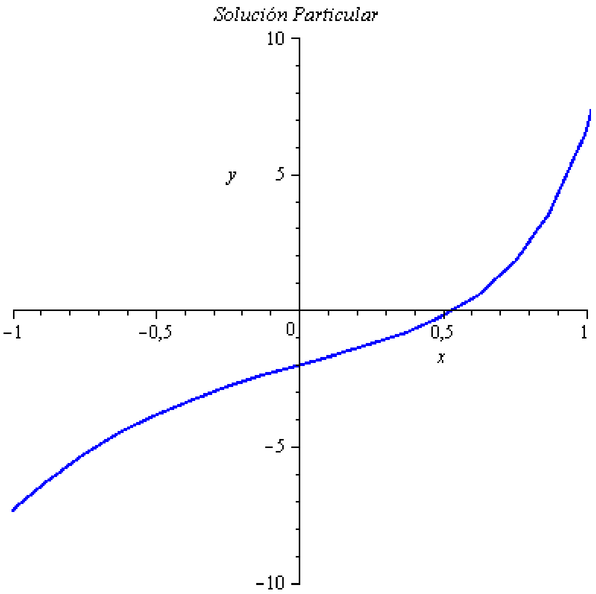
Graficar la solución general y particular.

Solución con Maple:

Expresión de ecuación diferencial	$eq := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + 3\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 2\,y(x) = 4\,e^{4\,x}$
Solución General	$m := y(x) = \left(\frac{2}{15}\,(e^x)^5 - e^{-x}\,\_C1 + \_C2\right)e^{-x}$
Condiciones Iniciales	$ini := y(0) = -2, D(y)(0) = 3$
Solución Particular	$F2 := y(x) = \left(\frac{2}{15}\,(e^x)^5 - \frac{1}{3}\,e^{-x} - \frac{9}{5}\right)e^{-x}$

Las gráficas respectivas son:





La solución completa puede verse en: ANEXO ECUACIONES DIFERENCIALES (Pag 51)

III- Q(x) es una función *sen bx* o *cos bx*, es decir, $Q(x) = sen\ bx$.

Se debe analizar si $\pm bi$ es raíz de la ecuación característica o no.

- Si $\pm bi$ no es raíz de la ecuación característica, se ensaya como integral particular

$u = A \cos bx + B\ sen\ bx$.

- Si $\pm bi$ es raíz de orden de multiplicidad ***h*** de la ecuación característica, se ensaya $u = x^h (A \cos bx + B\ sen\ bx)$.

Si $Q(x) = \cos bx$, se hace el mismo razonamiento.

Ejemplos:

a) $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$, la ecuación característica es $r^2 + 4r + 4 = 0$, $r_{1,2} = -2$, luego

$u = A \cos 2x + B\ sen\ 2x$

b) $y'' + 4y = \cos 2x$, la ecuación característica es $r^2 + 4 = 0$, $r_{1,2} = \pm 2i$, luego

$u = x (A \cos 2x + B\ sen\ 2x)$

IV- $\boldsymbol{Q(x) = e^{ax} (P_s(x) \cos bx + Q_s(x)\ sen\ bx)}$**,** donde uno de los polinomios $P_s(x)$ o $Q_s(x)$ tiene grado s y el otro no mayor que s o aún de grado cero.

- Si $a \pm bi$ no es raíz de la ecuación característica, se ensaya como solución particular

$u = e^{ax} [P_s(x) \cos bx + Q_s(x)\ sen\ bx]$, donde P_s y Q_s son polinomios de grado s.

- Si $a \pm bi$ es raíz de orden de multiplicidad h de la ecuación característica, se ensaya como solución particular $u = x^h e^{ax} [\ P_s(x) \cos bx + Q_s(x)\ sen\ bx]$

Ejemplos:

a) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} (x \cos x + 3\ sen\ x)$

$r^2 + 2r + 2 = 0$, $\qquad r_{1,2} = -1 \pm i$

$u = x\, e^{-x} [(A x + B) \cos x + (C x + D)\ sen\ x]$

10.2 METODO DE VARIACION DE PARAMETROS

Este método es útil para hallar una integral particular de una ecuación diferencial lineal. Es aplicable no sólo a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, sino a cualquier ecuación diferencial lineal.

Sea

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots.. + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x) \qquad (1)$$

y suponiendo que la ecuación homogénea tiene como solución general

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n \qquad (2)$$

Es decir que $y_1, y_2, ..., y_n$ forman un sistema fundamental de soluciones.

Se demuestra que existen n funciones $C_i(x)$ que reemplazadas en (2) dan la solución particular que buscamos.

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + ... + C_n(x)\, y_n$$

Como hay n funciones de x que determinar y una sola condición la ecuación (1) a verificar, se imponen (n-1) condiciones a los $C_i(x)$.

Derivando y se obtiene

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + ... + C_n y_n' + C_1' y_1 + C_2' y_2 + ... + C_n' y_n$$

Le imponemos a las constantes la condición

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + ... + C_n' y_n = 0$$

La derivada segunda es

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + ... + C_n y_n'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + ... + C_n' y_n'$$

con la condición de que

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + ... + C_n' y_n' = 0$$

y así siguiendo, la derivada n-ésima es

$$y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + ... + C_n y_n^{(n)} + C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + ... + C_n' y_n^{(n-1)}$$

con la condición de que

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + ... + C_n' y_n^{(n-1)} = Q(x)$$

Luego se tiene un sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$C_1' \, y_1 + C_2' \, y_2 + ...+ C_n' \, y_n = 0$$

$$C_1' \, y_1' + C_2' \, y_2' + ...+ C_n' \, y_n' = 0$$

....

$$C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0$$

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = Q(x)$$

donde los $C_i'(x)$ son las incógnitas.

Calculemos por ejemplo $C_1(x)$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n \\ 0 & y_2' & \cdot & \cdot & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q(x) & y_2^{(n-1)} & \cdot & \cdot & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdot & \cdot & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdot & \cdot & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}$$

el determinante de los coeficientes es el **Wronskiano**. Es distinto de cero por ser $y_1, y_2, \ldots.., y_n$ linealmente independientes. Por simple integración se encuentra $C_1(x)$.

En general, integrando $C_i(x) = \int \frac{W_i}{W}\, dx$ y reemplazando en (2) nos da la solución particular buscada.

Debemos probar que $y, y', \ldots.., y^{(n)}$ con las n condiciones arbitrarias impuestas, satisfacen la ecuación diferencial.

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots.. + C_n y_n$

$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots.. + C_n y_n'$

$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots.. + C_n y_n''$

....

$y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots.. + C_n y_n^{(n)} + Q(x)$

reemplazando en (1)

$C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots.. + C_n y_n^{(n)} + Q(x) + a_1[C_1 y_1^{(n-1)} + \ldots.. + C_n y_n^{(n-1)}] + \ldots.. + a_{n-1}[C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots.. + C_n y_n'] + a_n[C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots.. + C_n y_n] = C_1[y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \ldots.. + a_n y_1] + C_2[y_2^{(n)} + \ldots.. + a_{n-1} y_2' + a_n y_2] + \ldots.. + C_n[y_n^{(n)} + \ldots.. + a_{n-1} y_n' + a_n y_n] + Q(x) = Q(x)$

Cada corchete es cero por ser $y_1, y_2, \ldots.., y_n$ solución de la ecuación homogénea. Luego $Q(x) = Q(x)$ con lo que se verifica la ecuación diferencial.

Ejemplo: $(D^2 + 1)\, y = cosec\ x$

La ecuación característica es $r^2 + 1 = 0$, las raíces $r_{1,2} = \pm i$, por lo que la solución general de la ecuación homogénea $v = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$.

La solución particular a ensayar $u = C_1(x) \cos x + C_2(x) \operatorname{sen} x$

$u' = -C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x + C_1' \cos x + C_2' \operatorname{sen} x$

$u'' = -C_1 \cos x - C_2 \operatorname{sen} x - C_1' \operatorname{sen} x - C_2' \cos x$

Para obtener los $C_i'(x)$ se imponen las siguientes condiciones

$C_1' \cos x + C_2' \operatorname{sen} x = 0$

$-C_1' \operatorname{sen} x + C_2' \cos x = \operatorname{cosec} x$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \frac{1}{\operatorname{sen} x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = -1 \qquad \text{luego} \quad C_1(x) = -x$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \operatorname{sen} x & \frac{1}{\operatorname{sen} x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = \cos x \, \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{entonces} \quad C_2(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$$

$u = -x \cos x + (\ln(\operatorname{sen} x)) \operatorname{sen} x$, solución particular de la ecuación completa

$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) - x \cos x$, solución general de la ecuación diferencial dada.

10.3 APLICACIONES DE LAS EC. DIF. DE SEGUNDO ORDEN

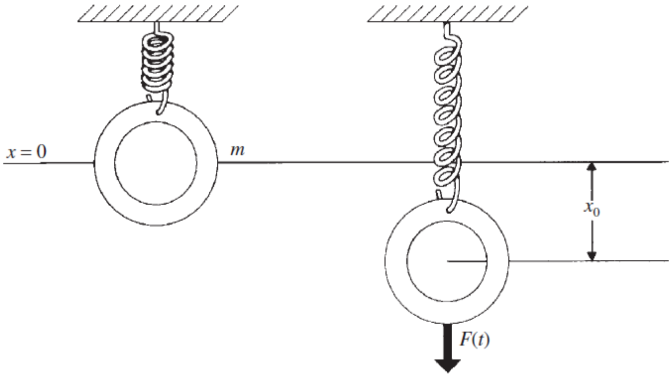
Se han desarrollado métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales de segundo orden. Los campos de las oscilaciones mecánicas y de las redes eléctricas son dos áreas importantes de aplicación de esta teoría, en los cuales un gran número de fenómenos son gobernados por ecuaciones de la forma:

$mx'' + cx' + kx = F(t)$, donde m, c y k son constantes, $F(t)$ una función conocida y representa la respuesta de un cierto sistema físico, como una función del tiempo t.

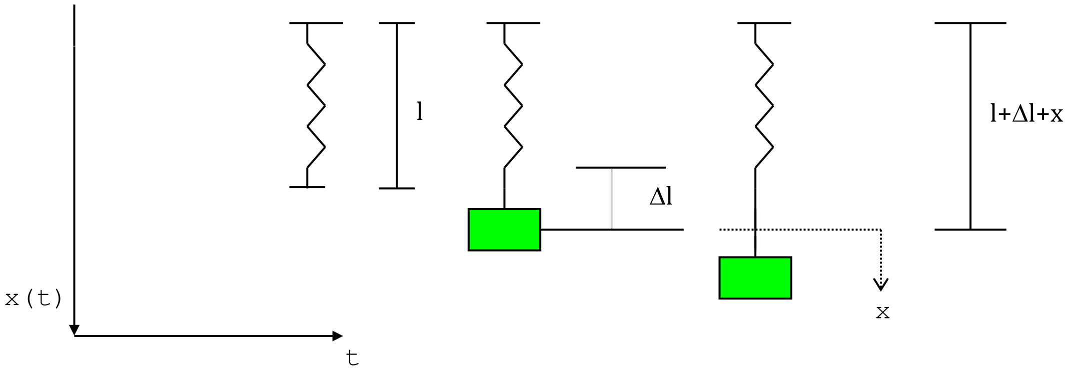
En particular, esta ecuación gobierna el movimiento de una masa que vibra en el extremo de un resorte vertical.

Se verá detalladamente la formación de dicha ecuación.

Se analiza el caso de elongación estática de un resorte de longitud natural "l", debido a la acción de la masa m.



Esquematizando el problema:



Δl es la elongación.

Las fuerzas que actúan sobre la masa son:

a) la fuerza de la gravedad $mg = w$ (actúa hacia abajo), donde g es la aceleración de la gravedad y w es el peso de la masa.

b) la fuerza del resorte que actúa hacia arriba, $k\Delta l$.

Como en esta posición la masa está en equilibrio, estas fuerzas son iguales.

De acuerdo a la Ley de Hooke, la fuerza del resorte es proporcional a Δl y tendrá magnitud $k\Delta l$, k es la constante del resorte. Puede calcularse para un peso conocido w, midiendo Δl y haciendo uso de:

$$k\,\Delta l = m\,g$$

Nota: las dimensiones de k son: $k = \dfrac{mg}{\Delta l} = \dfrac{fuerza}{longitud}$

En el problema dinámico estamos interesados en estudiar el movimiento de la masa cuando actúa sobre ella una masa externa o es inicialmente desplazado. Consideremos $x(t)$ positivo hacia abajo para denotar el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio. El desplazamiento $x(t)$ es debido a las fuerzas que actúan sobre la masa. Estas son:

1) su peso $w = m\,g$, que siempre actúa hacia abajo.
2) la fuerza F_s debida al resorte que es proporcional a la elongación ($\Delta l + x$) y siempre actúa para regresar el resorte a su posición natural; $F_s = - k\,(\Delta l + x)$.
3) el amortiguamiento o fuerza resistente F_d. Esta fuerza puede ser debida a las propiedades viscosas del fluido en el cual se mueve la masa (resistencia del aire por el momento) o, que el movimiento de la masa se realice en aceite o con un mecanismo amortiguador. En cualquiera de los casos, la fuerza de amortiguamiento actuará en una dirección opuesta a la del movimiento de la masa.
   $F_d = - c\,x'$.
4) Una fuerza aplicada $F(t)$ dirigida hacia abajo o hacia arriba, debida al movimiento del resorte donde está anclado el resorte o a una fuerza aplicada directamente sobre la masa. De acuerdo a la Ley de Newton:

$m\,g + F_s + F_d + F(t) = m\,x''$, reemplazando F_s y F_d $\quad m\,g - k\,(\Delta l + x) - c\,x' + F(t) = m\,x''$

como $k\,\Delta l = m\,g$, la ecuación diferencial que se obtiene es:

$$m\,x'' + c\,x' + k\,x = F(t) \qquad \text{(I)}$$

Vibraciones Libres

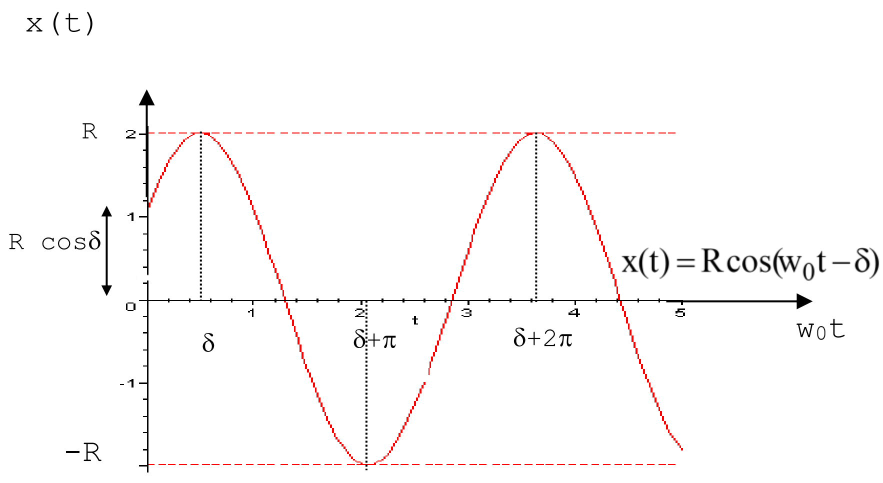
Si no hay fuerza externa ni amortiguamiento, la ecuación (I) se reduce a: $mx'' + kx = 0$

cuya ecuación característica es $mr^2 + k = 0$, $\quad r_1 = +\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,i$, $r_2 = -\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,i$

$$x = A\cos w_o t + B\,\mathrm{sen}\,w_o t \qquad (1)$$

donde $w_0^2 = \dfrac{k}{m}$, y w_0 es la llamada frecuencia circular.

A y B se determinan para un problema en particular por las condiciones iniciales.



Podemos escribir (1) como

$x(t) = R\cos(w_o t - \delta)$, cuyo período $T = 2\pi / w_o$

$x(t) = R(\cos w_o t \cos\delta + \operatorname{sen} w_o t \operatorname{sen}\delta)$

(ésto resulta de resolver las ecuaciones $A = R\cos\delta$, $B = R\operatorname{sen}\delta$ para δ, con $R = (A^2 + B^2)^{½}$).

Nota: $x = A\cos w_o t + B\operatorname{sen} w_o t$, también se puede demostrar que $x = r\operatorname{sen}(w_o t - \theta)$ donde r y θ se determinan en términos de A y B.

Vibraciones Libres Amortiguadas

Si se incluye el efecto del amortiguamiento, la ecuación diferencial que gobierna el movimiento libre es $m x'' + c x' + k x = 0$

Las raíces de la ecuación característica son

a) $c^2 - 4km > 0$, $x = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$ $(r_1 \text{ y } r_2 < 0)$

b) $c^2 - 4km = 0$, $x = (A + B t)\, e^{-(\frac{c}{2m})t}$

c) $c^2 - 4km < 0$,

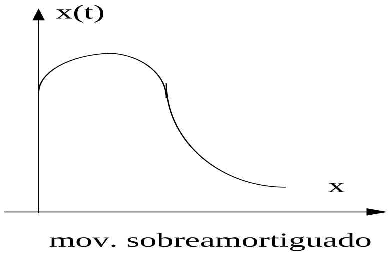
$$x = e^{-(\frac{c}{2m})t}(A\cos ut + B\operatorname{sen} ut), \quad con \quad u = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} > 0$$

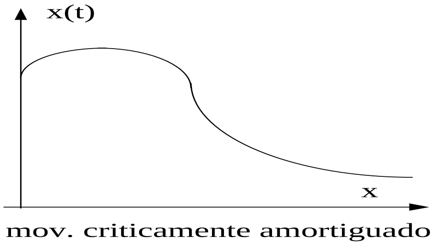
En los tres casos, $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, por lo tanto, el movimiento decae con el transcurso del tiempo. Esto es claramente cierto independientemente de las condiciones iniciales, es decir, sin importar los valores de A y B.

Los primeros dos casos, ecuaciones a) y b) que se denominan movimiento amortiguado y críticamente amortiguado respectivamente, representan movimientos en los cuales la masa desplazada regresa lentamente a su posición de equilibrio.

El tercer caso c), conocido como movimiento periódico amortiguado, frecuentemente se presenta en sistemas mecánicos y representa una vibración amortiguada. Nuevamente, haciendo $A = R \cos \delta$ y $B = sen\ \delta$

Gráficamente:

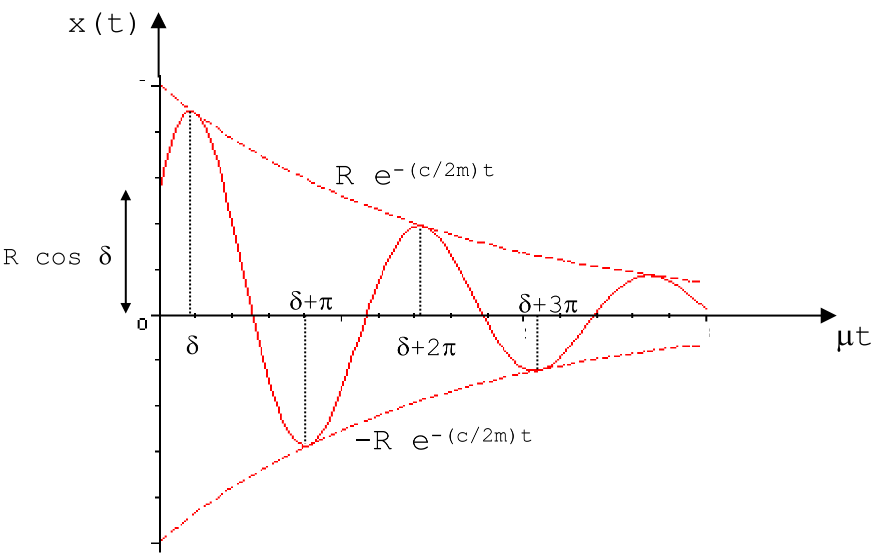




c) queda:

$$x(t) = R\, e^{-(\frac{c}{2m})t} \cos(\,ut - \delta\,)$$

Gráficamente:



Vibraciones Forzadas

Consideremos ahora el caso en el cual se aplica al sistema masa - resorte, una fuerza externa periódica $F_o \cos wt$. La ecuación del movimiento es $m\,x'' + c\,x' + k\,x = F_o \cos wt$.

Supongamos que no hay amortiguación, entonces la ecuación se reduce a:

$$m\,x'' + k\,x = F_o \cos wt$$

1) Denominando $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \neq \omega$, la solución general es

(II) $$x(t) = C_1 \cos \omega_o t + C_2 \operatorname{sen} \omega_o t + \frac{F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

donde C_1 y C_2 son determinadas por las condiciones iniciales.

El movimiento resultante es, en general, la suma de dos movimientos periódicos de períodos y amplitudes diferentes.

Supongamos que la masa está inicialmente en reposo: x(0) = 0 y x'(0) = 0 , entonces:

$$C_1 = -\frac{F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}, \qquad C_2 = 0$$

y la solución de la ecuación (II) es:

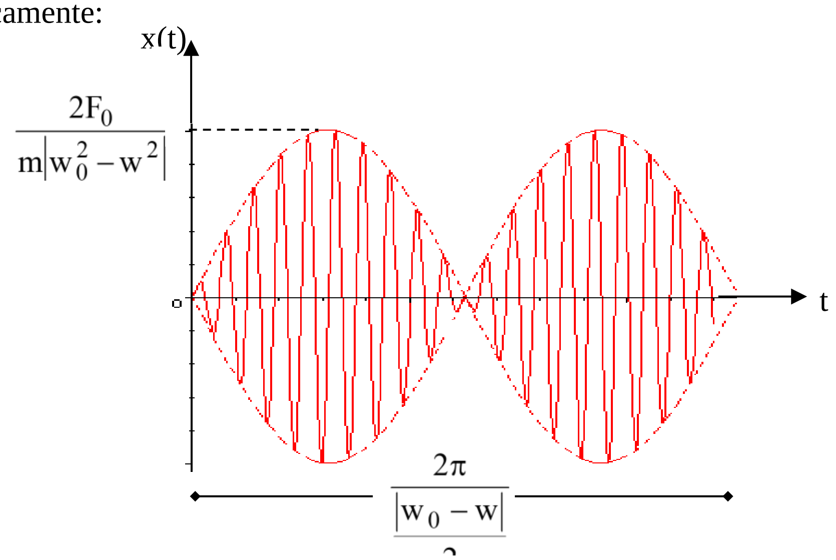
$$x(t) = \frac{F_0}{m(w_0 - w)}(\cos wt - \cos w_0 t) \qquad (2)$$

Haciendo uso de identidades trigonométricas y ciertas suposiciones se puede escribir (2) de la forma

$$x(t) = \frac{2F_0}{m(w_0^2 - w^2)} \operatorname{sen}\frac{(w_0 - w)}{2} t \operatorname{sen}\frac{(w_0 + w)}{2} t$$

Este fenómeno se conoce por el nombre de batido.

Gráficamente:

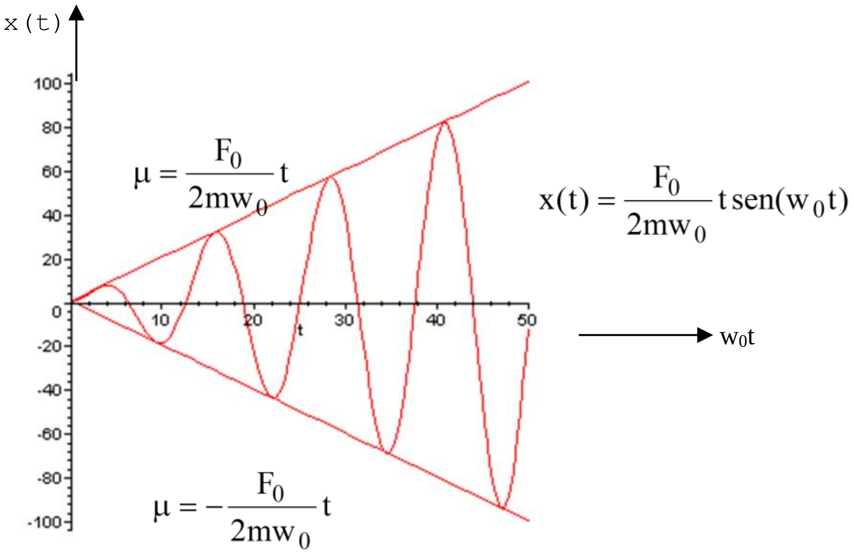


2) Supongamos que $w = w_o$, o sea que el período de la fuerza externa sea el mismo que el período natural del sistema, entonces

$$x(t) = C_1 \cos w_0 t + C_2 \operatorname{sen} w_0 t + \frac{F_o}{2mw_0} t \operatorname{sen} w_0 t$$

Como la presencia del término t sen w_0t no depende de C_1 y C_2, el movimiento no estará acotado cuando t $\rightarrow \infty$.

Este fenómeno se conoce como resonancia.



Redes Eléctricas

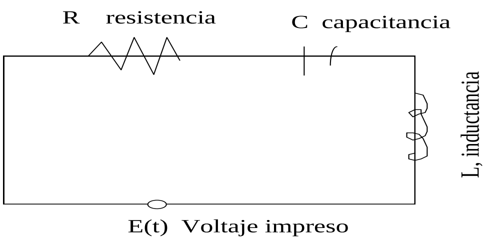
Consideremos el flujo de corriente eléctrica en un circuito simple en serie.

Por la segunda Ley de Kirchoff "en un circuito cerrado, el voltaje aplicado es igual a la suma de las caídas de voltaje en el resto del circuito", por lo tanto:

$$L \frac{dI}{dt} + R\,I + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

Como $I = dQ / dt$ entonces $LQ'' + RQ' + (1/C)Q = E(t)$

Es interesante observar la analogía entre el problema de vibraciones mecánicas y el de circuitos eléctricos.



Sistema Mecánico		**Circuito eléctrico**	
$mx'' + cx' + kx = F(t)$		$LQ'' + RQ' + (1/C)Q = E(t)$	
desplazamiento	x	carga	Q
velocidad	x'	corriente	I
masa	m	inductancia	L
amortiguación	c	resistencia	R
constante resorte	k	elastancia	$1/C$
fuerza aplicada	$F(t)$	voltaje aplicado	$E(t)$

11. SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Hasta ahora hemos resuelto solo una ecuación diferencial. Sin embargo, muchas aplicaciones físicas requieren de más de una ecuación para describir la situación, o sea usar dos o más variables dependientes siendo cada una función de una misma variable independiente (por lo general el tiempo). Estos problemas conducen a plantear un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. En general denotaremos la variable independiente con t y mediante $x,y,z,......$ las variables dependientes.

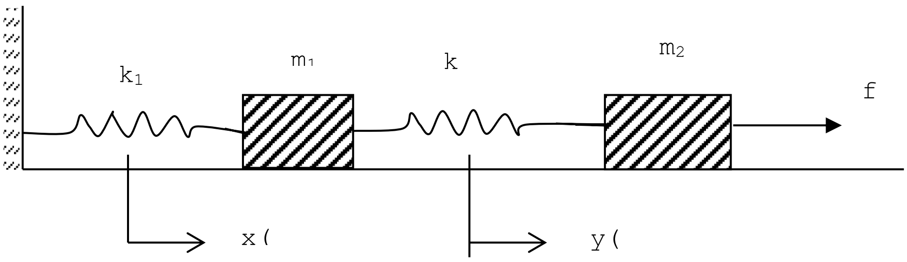
Por ejemplo un sistema de dos ecuaciones diferenciales de 1º orden tiene la forma:

$$\begin{cases} f\left(t,x,y,x',y'\right)=0 \\ g\left(t,x,y,x',y'\right)=0 \end{cases}$$

Solución del sistema:

La solución de un sistema como el anterior es un par de funciones x(t) e y(t) que satisfagan cada ecuación del sistema en algún intervalo I de valores de t, en forma simultánea.
Los ejemplos siguientes muestran como surgen algunos sistemas de ecuaciones diferenciales:

Ejemplo 1: Supongamos que dos masas m_1 y m_2 están sujetas por dos resortes de constantes k_1 y k_2. Sobre la masa m_2 actúa una fuerza externa $f(t)$. Sean $x(t)$ e $y(t)$ los desplazamientos de las masas m_1 y m_2 respectivamente, desde la posición de equilibrio.



Si a las dos masas le aplicamos la ley de Newton obtenemos el sistema:

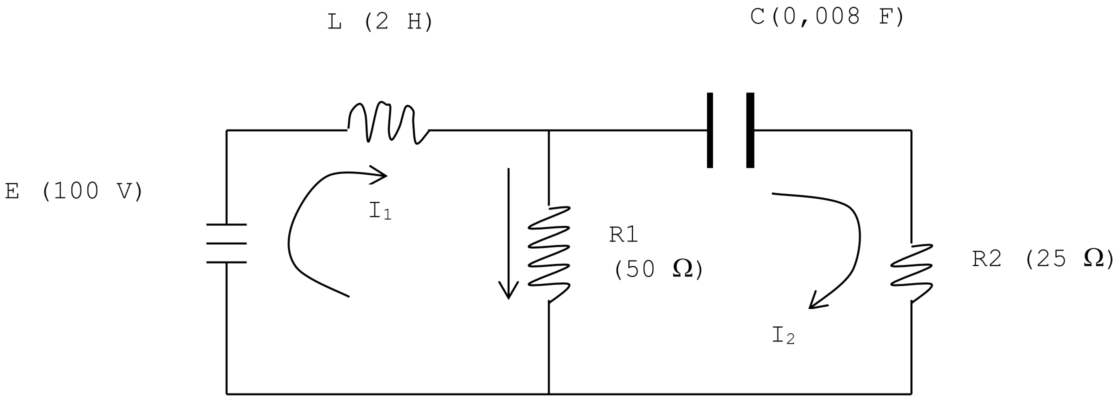
$$\begin{cases} m_1 x'' = -k_1 x + k_2 (y - x) \\ m_2 y'' = -k_2 (y - x) + f(t) \end{cases}$$

Si por ejemplo $m_1=2$; $m_2=1$; $k_1=4$; $k_2=2$ y $f(t) = 40\, sen\, 3t$ en sus correspondientes unidades físicas, queda:

$$\begin{cases} 2x'' = -6x + 2y \\ y'' = 2x - 2y + 40\, sen\, 3t \end{cases}$$

La solución del sistema son las funciones que representan los desplazamientos x(t) e y(t)

Ejemplo 2: Se considera la siguiente red eléctrica.



donde $I_1(t)$ es la corriente que atraviesa a L e $I_2(t)$ es la corriente atraviesa a R_2. La corriente que pasa por la resistencia R_1 es $I = I_1 - I_2$. Aplicando la ley de Kirchoff al circuito de la izquierda, queda:

$$L \frac{dI_1}{dt} + R_1 (I_1 - I_2) = E$$

Aplicándola al circuito de la derecha:

$$-\frac{1}{c} Q + R_2 I_2 + R_1 (I_2 - I_1) = 0$$

siendo $Q(t)$ la carga del capacitor y $\frac{dQ}{dt} = I_2$, derivando

$$-\frac{1}{c}I_2 + R_2\frac{dI_2}{dt} + R_1\left(\frac{dI_2}{dt} - \frac{dI_1}{dt}\right) = 0$$

reemplazando valores:

$$\begin{cases} -2\frac{dI_1}{dt} + 50\left(I_1 + I_2\right) - 100 = 0 \\ -50\frac{dI_1}{dt} + 75\frac{dI_2}{dt} + 125I_2 = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema son las corrientes en el circuito $I_1(t)$ e $I_2(t)$.

11.1 SOLUCIÓN DE SIST. DE EDO: MÉTODO DE ELIMINACIÓN

El objeto de este procedimiento es eliminar sucesivamente las variables

dependientes hasta que quede solamente una ecuación con una única variable dependiente. Después de que se tenga la solución de esa ecuación, las otras variables dependientes se determinan a su vez usando las ecuaciones diferenciales originales o aquellas que hayan aparecido durante el proceso de eliminación.
Este método es bastante similar al que se emplea para resolver sistemas algebraicos por eliminación de variables. Es conveniente para el caso de sistemas pequeños y manejables, aquellos que no contienen más de dos o tres ecuaciones.

Ejemplo*:* Considere el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x' = x + y & (1) \\ y' = 4x + y & (2) \end{cases}$$

Si de la ecuación (1) despejamos *y*, $y = x' - x$ (3)

derivando $y' = x'' - x'$, reemplazando en la ecuación (2)

$x'' - x' = 4x + x' - x$; se eliminó la variable *y*, luego

$x'' - 2x' - 3x = 0$ es una ecuación. diferencial de 2º orden.

La ecuación característica es $r^2 - 2r - 3 = 0$ y sus raíces $r_1=3$, $r_2= -1$, luego la solución general

es $x\left(t\right) = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$. Para encontrar y se usa la ecuación (3), así

$x'(t) = 3C_1e^{3t} - C_2\, e^{-t}$ y por lo tanto $y(t) = 3C_1e^{3t} - C_2e^{-t} - C_1e^{3t} - C_2e^{-t}$.

Por lo que la solución general del sistema es:

$$x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$$
$$y(t) = 2C_1\, e^{3t} - 2C_2\, e^{-t}$$

Método de eliminación*:* Es útil sobre todo para sistemas de orden superior a uno y cuando son sistemas no homogéneos.

Usando el ejemplo anterior:

$$\begin{cases} x' - x - y = 0 \\ -4x - y - y' = 0 \end{cases}$$

Usando el operador $D = \dfrac{d}{dx}$

$$\begin{cases} Dx - x - y = 0 \\ -4x - y + Dy = 0 \end{cases} , \text{ o lo que es igual } \quad \begin{cases} (D-1)x - y = 0 \\ -4x + (D-1)y = 0 \end{cases}$$

Trabaja con el método de eliminación:

$$y = (D-1)x$$
$$-4x + (D-1)(D-1)x = 0 , \text{ se eliminó la variable y}$$
$$-4x + (D-1)^2\, x = 0 , \qquad -4x + \left(D^2 - 2D + 1\right)x = 0$$
$$-4x + D^2x - 2Dx + x = 0 , \qquad -4x + x'' - 2x' + x = 0$$

ecuación diferencial de segundo orden en *x*, $x'' - 2x' - 3x = 0$, ecuación característica

$r^2 - 2r - 3 = 0$

$r_1=3$ y $r_2= -1$, la solución general es:

$$x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$$

Para encontrar la variable *y*:

$y = (D-1)x$, $y = Dx - x$ por lo que $y = x' - x$,

así la solución general es:

$$y(t) = 2C_1e^{3t} - 2C_2e^{-t}$$

Por lo que la solución general del sistema dado es:

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$$

$$y(t) = 2C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-t}$$

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases} x' = -x \\ y' = x - y \end{cases}$ que verifica x(0)=1,y(0)=1, utilizando Maple.

$$eqn1 := \frac{d}{dt} x(t) = -x(t)$$

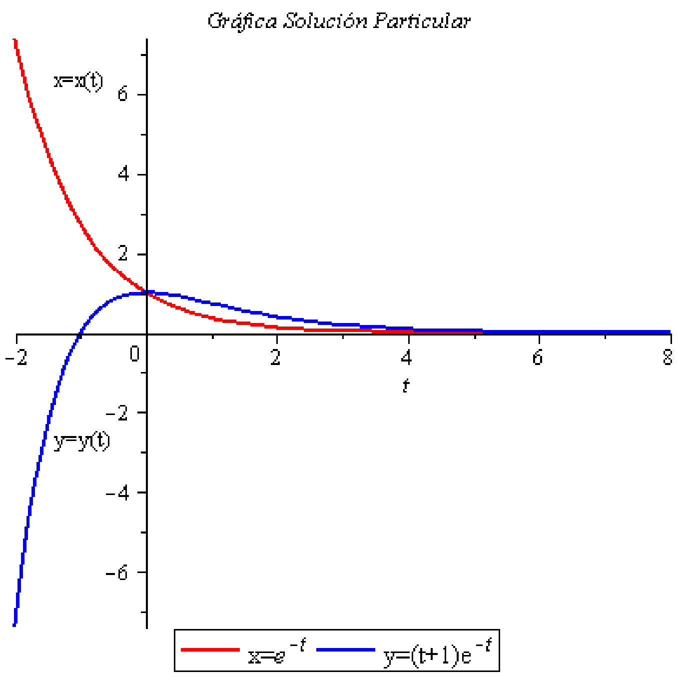
$$eqn2 := \frac{d}{dt} y(t) = x(t) - y(t)$$

La solución general es: $\{x(t) = \_C2\, e^{-t}, y(t) = (\_C2\, t + \_C1)\, e^{-t}\}$

Las condiciones iniciales son: x(0)=1,y(0)=1

La solución Particular es: $\{x(t) = e^{-t}, y(t) = (t+1)\, e^{-t}\}$

La gráfica de la solución Particular es:



11.2 REDUCCIÓN DE UNA EDO DE ORDEN N A UN SISTEMA DE EDOs DE ORDEN 1

Supongamos la ecuación:

$$y^{(n)} = -a_0 y - a_1 y' - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{n-1} y^{(n-1)} + f(t) \qquad (4)$$

Si introducimos las variables:

$$y = x_1 \quad ; \quad y' = x_2 ; \quad y'' = x_3 \ ;\ldots\ldots\ldots; \ y^{(n-1)} = x_n$$

entonces:

$$\begin{aligned} y' &= x'_1 = x_2 \\ y'' &= x'_2 = x_3 \\ &. \\ &. \\ &. \\ &. \\ y^{(n-1)} &= x'_{n-1} = x_n \end{aligned}$$

reemplazando en (4)

$$x'_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{n-1} x_n + f(t)$$

$$\left\{ \begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ &. \\ &. \\ &. \\ &. \\ x'_{n-1} &= x_n \\ x'_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots\ldots\ldots - a_{n-1} x_n + f(t) \end{aligned} \right. \qquad (5)$$

(5) es un sistema de ecuaciones diferenciales de 1º orden.

Ejemplo: Exprese en forma de sistema la siguiente ecuación diferencial

$$x'' + 2x' - 8x = e^t \ ; \qquad x(0) = 1 \ , \qquad x'(0) = -4$$

Solución: despejando $x'' = -2x' + 8x + e^t$ (6)

Definiendo $x_1(t) = x$ y $x_2(t) = x'$, como la ecuación diferencial es de segundo orden se necesitan dos variables nuevas, se obtiene $x_1' = x_2$.

Reemplazando en (6) $x'' = -2x' + 8x + e^t = -2x_2 + 8x_1 + e^t$, así el sistema tiene la forma:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_2 + 8x_1 + e^t \end{cases}$$

la solución del sistema es: $x_1(t) = \frac{31}{30}e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{5}e^t$

$$x_2(t) = -\frac{62}{15}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{5}e^t$$

Como $x_1(t) = x$, la solución de la ecuación diferencial dada es:

$$x(t) = x_1(t) = \frac{31}{30}e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{5}e^t$$

12. ANEXO ECUACIONES DIFERENCIALES

Raíces reales y distintas

Si una ecuación característica tiene "n" raíces reales y distintas r_1, r_2, ..., r_n, la ecuación diferencial tiene por solución general

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x} \qquad (4)$$

donde los c_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

Esto se cumple siempre que sea una combinación de funciones linealmente independiente

Supongamos tener una combinación linealmente dependiente, o sea que:

$$K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x} + \ldots + K_n e^{r_n x} = 0$$

con algún $K_i \neq 0$, por ejemplo $K_1 \neq 0$, entonces despejando $e^{r_1 x}$ se obtiene:

$$e^{r_1 x} = -\frac{K_2}{K_1} e^{r_2 x} - \ldots - \frac{K_n}{K_1} e^{r_n x}$$

reemplazando en (4) obtenemos:

$$y = c_1 \left[-\frac{K_2}{K_1} e^{r_2 x} - ..... - \frac{K_n}{K_1} e^{r_n x} \right] + c_2 e^{r_2 x} + ... + c_n e^{r_1 x}$$

$$y = \left(c_2 - c_1 \frac{K_2}{K_1} \right) e^{r_2 x} + \left(c_3 - c_1 \frac{K_3}{K_1} \right) e^{r_3 x} + ... + \left(c_n - c_1 \frac{K_n}{K_1} \right) e^{r_n x}$$

La que se puede escribir de la siguiente forma

$$y = c_2^* e^{r_2 x} + c_3^* e^{r_3 x} + ... + c_n^* e^{r_n x}$$

que es una combinación lineal de *n-1* constantes, por lo que no es la **solución general** de una ecuación diferencial de orden "*n*".

Veamos una forma general de probar cuándo una combinación lineal de soluciones es independiente.

Sea L(D)y = 0, si la solución general de ecuación homogénea es $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$ se llama determinante Wronskiano o de Wronsky al formado por

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 .... y_n \\ y'_1 & y'_2 .... y'_n \\ .... & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} .... y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Si W ≠ 0 entonces las funciones son linealmente independientes y recíprocamente.

Considerando (4), el Wronskiano tiene la siguiente forma

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} .... e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x_1} & r_2 e^{r_2 x} .... r_n e^{r_n x} \\ .... & \\ r_1^{(n-1)} e^{r_1 x} & r_2^{(n-1)} e^{r_2 x} .... r_n^{(n-1)} e^{r_n x} \end{vmatrix} = \underbrace{e^{r_1 x} e^{r_{2x}} .... e^{r_n x}}_{\neq 0} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 .... 1 \\ r_1 & r_2 .... r_n \\ .... & \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} .... r_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{Det.Vandermonde}$$

Se demuestra que el determinante de Vandermonde es:

$(r_1 - r_2)(r_1 - r_3).....(r_1 - r_n)(r_2 - r_3).....(r_2 - r_n).....(r_{n-1} - r_n)$

como las n raíces de la ecuación característica son reales y distintas, éste es distinto de cero, por lo tanto el Wronskiano también lo es y la combinación es linealmente independiente .

Raíces Coincidentes o Múltiples

El análisis se hará sobre una ecuación diferencial de segundo orden $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ con raíces $r_1 = r_2 = r$, para luego generalizar estos resultados.

Con el razonamiento anterior podríamos pensar que la solución general es:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = (C_1 + C_2) e^{r x} = C_3 e^{r x}$$

observamos que tiene **una sola** constante arbitraria, luego no es solución general de la ecuación dada.

Por lo tanto ensayamos como solución $y = u e^{rx}$ con $u = u(x)$ por ahora desconocida.

$y' = u' e^{rx} + r u e^{rx}$, $y'' = u'' e^{rx} + 2 r u' e^{rx} + r^2 u e^{rx}$, reemplazando en la ecuación dada

$[u'' + 2 r u' + r^2 u + a_1 u' + a_1 r u + a_2 u] e^{rx} = 0,$ operando

$u'' + u' (2 r + a_1) + u (r^2 + a_1 r + a_2) = 0$

$r^2 + a_1 r + a_2$ es igual a cero por ser r raíz, y $2 r + a_1$ también es cero por ser la derivada de la expresión anterior. Se obtiene $u'' = 0$, integrando dos veces se encuentra que $u = C_1 x + C_2$ luego la solución general es : $y = (C_1 x + C_2) e^{rx}$.

Se afirma que e^{rx} , $x e^{rx}$ forman un **sistema fundamental** de soluciones, dejando la demostración a cargo del lector.

Generalizando, en el caso de tener una ecuación diferencial lineal de orden "*n*", cuya ecuación característica tiene "n" raíces coincidentes, tenemos como solución general :

$$y = (C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_{n-1} x + C_n) e^{rx}$$

13. BIBLIOGRAFÍA:

1. Zill, D. G. y Cullen, M. R. 2002. *ECUACIONES DIFERENCIALES CON PROBLEMAS DE VALORES EN LA FRONTERA.* Thomson Learning.
2. Trench, W. 2002. *ECUACIONES DIFERENCIALES*. Thomson Learning.
3. Stewart, J. 2002. CÁLCULO. Thomson Learning.
4. Boyce, W. E. y Di Prima, R. C.. 1974. *ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LAS FRONTERAS* . Editorial Limusa
5. Spiegel, M.R. 1981. *ECUACIONES DIFERENCIALES MODERNAS.* Mc. Graw Hill. Colección Schaum.
6. Ayres, F. Jr**.** *ECUACIONES DIFERENCIALES*. Editorial Mc Graw-Hill. Colección Schaum.
7. D. Zill. 1990. *ECUACIONES DIFERENCIALES CON APLICACIONES*. Thomson Learnig..

6. Toppo R. P. ,Zavala Y. R. 2001. *PROBLEMARIO de ECUACIONES DIFERENCIALES***.** Editorial Thomson International.

7. N. Piskunov. 1978. *CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL*. Montaner y Simon S.A.
8. Edwards C. H., Penney D. E. 2001. *ECUACIONES DIFERENCIALES***.** Editorial Pearson Educación