Ejercitación Unidad 1

Ejercicio 1.

a. Clasifique los siguientes campos en escalares o vectoriales.

b. Determine el conjunto de partida y de llegada.

c. Determine y grafique el campo de existencia en cada caso.

a) $f(x,y) = \frac{x-3y}{x+3y}$, calcule $f(4,2)$	b) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$, calcule $f(2,1)$
c) $f(x,y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$	d) $\bar{f}(x,y) = e^{xy}\vec{i} + x^2\vec{j}$ calcule $\bar{f}(1,1)$
e) $\bar{f}(x,y,z) = xy\,\vec{i} + z^2\vec{j}$	f) $\bar{g}(t) = t^{1/2}\vec{i} + t^3\vec{j}$

Ejercicio 2. Dado el campo vectorial $\boldsymbol{\bar{g}(x,y) = y\ \vec{i} - x\vec{j}}$

a) Calcule y grafique en el plano $\bar{g}(1,3)$, $\bar{g}(-1,2)$, $\bar{g}(1,1)$.

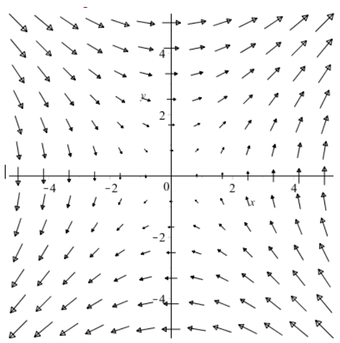
b) Evalúe y grafique el campo vectorial dado sobre 4 puntos de la circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

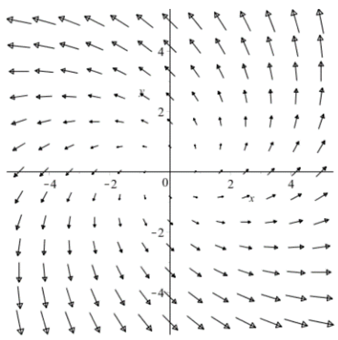
c) ¿Identifica en la gráfica del apartado b) la forma del campo con un concepto de física? Indique cual.

Ejercicio 3. Seleccione el campo vectorial correspondiente a cada una de las gráficas marcadas de I a IV. Fundamente su elección.

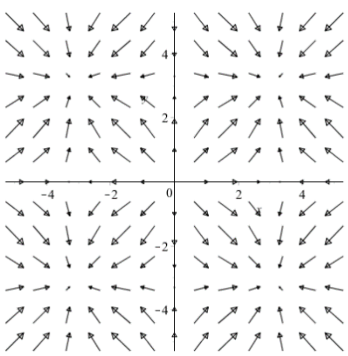
I -



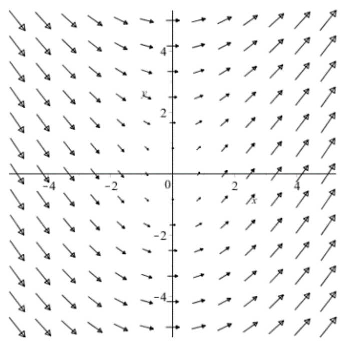
II -



III -



IV -



a) $\overline{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{ln}(\mathbf{1} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}})\bar{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{x}\,\bar{\boldsymbol{\jmath}}$
b) $\overline{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{sen}\,(\boldsymbol{x})\,\bar{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{y})\,\bar{\boldsymbol{\jmath}}$
c) $\overline{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}\,\bar{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{x}\,\bar{\boldsymbol{\jmath}}$
d) $\overline{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{y})\bar{\boldsymbol{\imath}} + (\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y})\,\bar{\boldsymbol{\jmath}}$

Ejercicio 5: El vector de posición de un objeto que se desplaza en el plano está dado por $\bar{r}(t) = t\,\bar{i} + t^2\,\bar{j}$, $t \in (0,2)$. Encuentre velocidad y aceleración del objeto. Grafique.

Ejercicio 6.

1. Defina Curva de nivel
2. Determine curvas de nivel de las siguientes funciones y grafique dichas curvas.

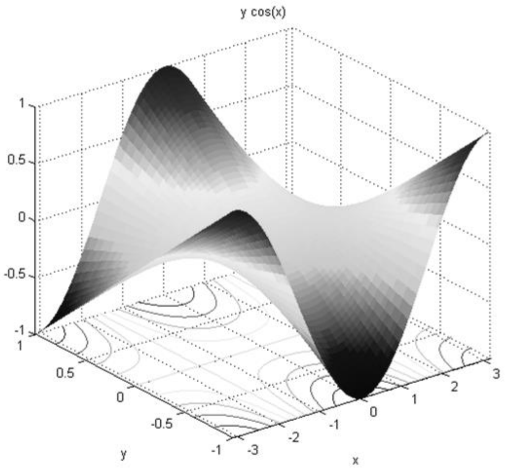
$a)\ \ z = 4x + 2y + 1$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$

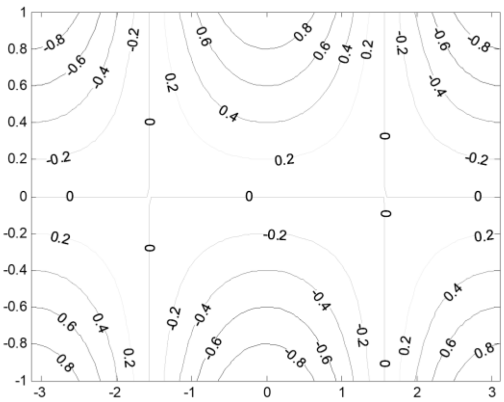
$c)\ \ z^2 = \dfrac{y}{x^2 + 1}$ $\qquad\qquad$ $d)\ \ z = y^2 + 4x^2$

Ejercicio 7. Grafique la función y trace curvas de nivel de $z = x^3 + y^3 + 3xy$.

Usando software, por ejemplo: Para $z = y \cdot \cos(x)$

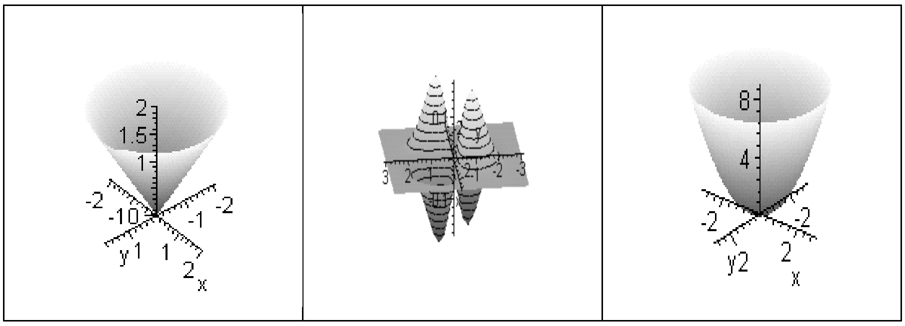
- En Matlab® ➔ ezmeshc(‘ y*cos(x) ’,[-pi,pi,-1,1])
- En Maple® ➔ with(plots):
  f:=(x,y) -> y*cos(x):
  contourplot(f(x,y), x=-π..π, y=-1..1);



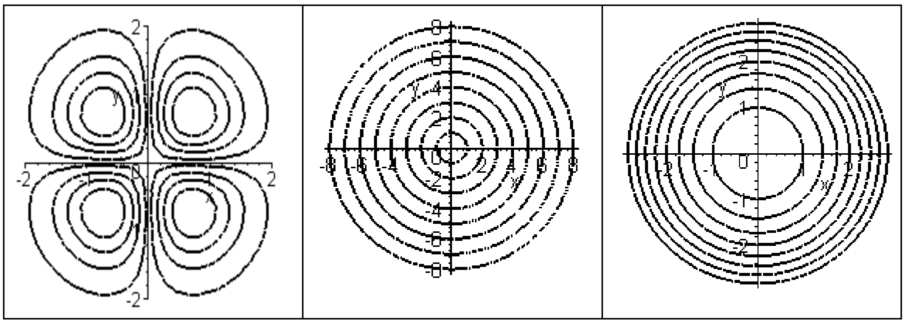


En Geogebra, en 3D escribir la función y se deben calcular las curvas de nivel a mano y luego graficar.

Ejercicio 8. Asocie a cada gráfica de la función su mapa de contorno.



I II III



A B C

Ejercicio 9.

I. De la definición de derivada parcial de $z = f(x,y)$ respecto a y e interprete geométrica y gráficamente.

II. Calcule las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones.

$a)$ $f(x,y) = e^{xy^2} + x$, evaluar en (1,0)

$b)$ $f(x,y,z) = 2z^3 + \ln xy$, evaluar en (1,1,1)

$c)$ $g(t,x) = \sqrt{t^3 + x^2}$

$d)$ $f(x,y) = x^{x.seny}$

$e)$ $f(r,\theta,\varphi) = r^2 \cdot sen\theta \cdot \cos\varphi$

$f)$ $f(x,y) = 2.x^2 - \dfrac{1}{x.y^2}$, evaluar en (2,1)

$g)$ $f(x,y) = \dfrac{y}{3} \cdot sen^3 2x$

III. Calcule las derivadas sucesivas f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} para las funciones de los apartados a) y b).

Ejercicio 10. El precio de una vivienda *P* en función de la superficie *S* y de la calidad de los materiales *C* viene dado por una función $P(S,C)$. Analice si es razonable decir que $\dfrac{\partial P}{\partial C} > 0$.

¿Y es razonable pensar que $\frac{\partial P}{\partial S}$ sea negativo?

Ejercicio 11. a) En la función $z = x^2 + y^2$, encuentre la recta tangente en el punto $(1,2,5)$ en el plano x=1.Grafique para $z \leq 9$. ¿Cómo es la variación de la función en la dirección de y cuando x se mantiene fijo?

b) Dada la función $z = 9 - x^2 - y^2$, encuentre la recta tangente en el punto (2,1,4) en el plano y=1. Grafique e interprete.

Ejercicio 12. Determine la región R en la cual las siguientes funciones son diferenciables.

a) $f(x, y) = \ln(2x + y^2)$ b) $f(x, y) = \sqrt{2y + (x-1)^2}$

c) $f(u,v) = sen(u^2.v).e^{3v}$ d) $f(x, y) = \frac{2}{(y^2 + x)^2}$

Ejercicio 13. i)- Defina diferencial de $z = f(x, y)$. Indique a partir de qué concepto surge esta definición.

ii) Cuál es la interpretación geométrica del diferencial

Ejercicio 14. Calcule el diferencial primero y segundo de las siguientes funciones, y de la expresión del mismo para los puntos dados.

$a)\ f(x, y) = y + \cos(xy),\ \mathrm{P} = (\pi,1)$; $b)\ f(x, y) = \frac{x}{y},\ \mathrm{P} = (1,2)$

Ejercicio 15. Determine el incremento aproximado en el volumen de un cilindro recto si su altura aumenta de 10 a 10,5 cm y su radio crece de 5 a 5,3 cm. ¿ Cuál es el nuevo volumen?

Ejercicio 16. Defina Vector Gradiente $\nabla f(x, y)$ y encuéntrelo para los siguientes campos reales.

a) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{z} + 3xy^2$

b) $w(u,v) = u\ln(v^2)$, $P = (1, 1)$. Grafique

c) $f(x,y) = e^{x^2y} + yx$, $P = (1, 1)$

Ejercicio 17. Dada $g(x, y) = x - y^2$

a) Encuentre $\overline{\nabla} g(3,-1)$ y determine la recta tangente a la curva de nivel $g(x, y) = 2$ en $(3,-1)$.

b) Grafique la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente. Enuncie la propiedad utilizada.

Ejercicio 18.

1- Dada la superficie $z = x^2 + y^2$. Halle el vector normal, el plano tangente y la recta normal en el punto (1,1, 2). Grafique.

2- ¿Qué **condición** debe cumplir la función $z = f(x, y)$ para admitir plano tangente? Justifique.

Ejercicio 19.

I- Defina Derivada Direccional e interprete geométrica y gráficamente

II- Calcule la derivada direccional de:

a) $z = \dfrac{x^2}{2} + \sqrt{y}$ en el punto (2,1), en la dirección del vector $\overline{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

b) $z = x^y + \dfrac{y^3 x}{3}$ en (1,2) en la dirección que forma $\dfrac{3}{4}\pi$ con el eje de las x.

c) $z = y^3 - 3x^2 y - xy$ en P_0= (3,1) en la dirección que va de P_1 = (2,2) a P_2= (-1,6).

Ejercicio 20. Considere la función $f(x, y) = x^2 y^4$. En (1,1) ¿Cuál es:

a) La tasa de cambio de *f(x,y)* en la dirección de **i** ?
b) La tasa de cambio de *f(x,y)* en la dirección de **i-j** ?
c) La tasa de cambio de *f(x,y)* en la dirección de **j** ?

Ejercicio 21. Considere la función $f(x, y) = x + y^2$. Determine la curva de nivel $f(x, y) = 1$, grafíquela. Calcule el vector tangente a la gráfica en el punto $(0,1)$, grafíquelo. Determine el valor de la derivada direccional de la función en $(0,1)$, en la dirección de este vector. Obtendrá el mismo resultado si repite el procedimiento anterior en cualquier punto de la misma curva de nivel?. Justifique su respuesta.

Ejercicio 22.

a) Si $f(x, y) = e^{x^2 y}$ y $\overline{u} = (1,0)$, $\overline{v} = (0,1)$. Calcule $D_{\overline{u}} f(x, y)$, $D_{\overline{v}} f(x, y)$. ¿Qué relación existe entre estas derivadas direccionales y las derivadas parciales de la función $f(x, y)$?

b) Determine la dirección en la cual la función $T(x, y) = y\, e^{sen(x-y)}$ disminuye más rápidamente en el punto $(1,1)$ y halle esa razón de cambio.

Ejercicio 23. De una función diferenciable en todo $\Re^2$ se sabe que el plano tangente a f (x,y) en el punto (1,2) es: 2*x* + 3*y* + 4*z* = 1 . ¿Se puede calcular con estos datos la derivada direccional de *f* en la dirección de $\overline{v} = (2,2)$ en el punto (1,2)? ¿Cuál es ese valor?

Ejercicio 24. Si la ecuación de la recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en un punto P viene dada por: $2\,(x-2) = \dfrac{y-3}{5} = -\,(z-2)$

a) Determine el valor de la función en P y $\nabla f(P)$

b) Calcule la derivada direccional de $z = f(x, y)$ en P y según la dirección que forma 45º con el eje x.

c) Obtenga la ecuación del plano tangente a la superficie en P.

Ejercicio 25. La elevación de una montaña sobre el nivel del mar en el punto P(x,y) es f(x,y). Un montañista en P nota que la pendiente en la dirección este es -1/2 y la pendiente en la dirección norte es -1/4. ¿En que dirección debe moverse para el descenso más rápido?

Ejercicio 26. Un esquiador esta descendiendo una montaña (suponga que la forma de la montaña responde a $f(x, y) = x^3 - y^5$. Se encuentra en el punto de coordenadas (2,-1,9). ¿Descenderá más rápido si lo hace en la dirección que apunta hacia el norte? ¿O en qué dirección lo hará?.

Ejercicio 27. I) Enuncie y demuestre el Teorema de la Regla de la cadena

II) Halle, utilizando regla de la cadena: $\dfrac{df}{dt}$.

a) $z = \sqrt{x + y^2}$, con $x = \operatorname{sen}\left(\dfrac{t}{2}\right)$, $y = 2t$ calcule $f'(1)$

b) $f(x, y, z) = x^2 y + \dfrac{y}{z}$, con $x = t - 1$, $y = t^2 - 1$, $z = \ln t^2$

c) $f(x, y, z) = x^2 y e^{1+z^2}$, con $x = t^2 + t$, $y = t^2 + 1$, $z = t^5 + 2$

Ejercicio 28. Halle $\dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial w}{\partial v}$ por regla de la cadena:

$a)\ w = \ln\left(x^2 - 2y^2\right)$, con $x = \cos v$, $y = u \cdot v$

$b)\ w = x^{yx} + yz$, con $x = u + v$, $y = -v$, $z = u^2$

Ejercicio 29: Sea $z = f\big(g(t_1, t_2, t_3), h(t_1, t_2, t_3)\big)$

a) Realice el diagrama mostrando las relaciones entre variables.

b) ¿Cuantas variables intermedias hay en el diagrama? ¿Qué tipo de derivadas las involucra?

c) ¿Cuantas variables finales hay? ¿Qué tipo de derivadas se pueden obtener?

d) Obtenga la $\dfrac{\partial z}{\partial t_3}$

Ejercicio 30: Obtener $\dfrac{dz}{dt}$ si $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3$; $\dfrac{dx}{dt} = 4$; y $\dfrac{dy}{dt} = -3$

Ejercicio 31: Sea z = f(x,y) con $x = u^2 - v^2$; $y = v^2 - u^2$

a) Demuestre que $u \frac{\partial z}{\partial v} + v \frac{\partial z}{\partial u} = 0$. Realice el diagrama correspondiente.

b) Verifique cuando z = sen (x + 2y)

Ejercicio 32.

I) Enuncie el Teorema de existencia y unicidad de la función implícita de una variable.

II) Verifique las condiciones y calcule la derivada $\frac{dy}{dx}$ en los puntos indicados en cada caso.

a) $F(x,y) = sen(x+y) + e^{\frac{y}{x}} = 0$ calcular la derivada en $P_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y en $P_2 = (1, \pi)$

b) $F(x,y) = e^{xy} - xy^2 + x^3 - 2 = 0$ en $P_0 = (1, 0)$

Ejercicio 33. Halle por derivación implícita las primeras derivadas parciales de *z* en el punto indicado en cada caso. Justifique el procedimiento realizado.

a) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2z - 1 = 0$ *en* $P = (0,-1,0)$

b) $F(x,y,z) = x + sen(y+z) = 0$ *en* $P = \left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Ejercicio 34.

a. Encuentre una aproximación lineal de la función $f(x,y) = 2 + \ln(x - 3y)$ en $(7,2)$.

b. Utilice el ítem anterior para aproximar $f(6{,}9\ ;\ 2{,}06)$. Calcule el valor exacto de $f(6{,}9\ ;\ 2{,}06)$ y compárelo con el aproximado.

Ejercicio 35.

a) ¿Qué condición debe cumplir $z = f(x,y)$ para poder ser desarrollada en Serie de Taylor? ¿Por qué? Haga el desarrollo por Serie de Taylor **hasta el orden n** de $z = f(x,y)$.

b) ¿Para qué se utiliza este desarrollo?

c) Desarrolle la función $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$ en potencias de *x* e *y-1* hasta el segundo grado.

d) Halle el polinomio de tercer grado que mejor aproxime en el origen a la función $f(x,y) = sen(x) \cdot sen(y)$.

e) Utilice la fórmula de Taylor hasta segundo orden para aproximar la función $f(x,y) = \cos(yx)$ en $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

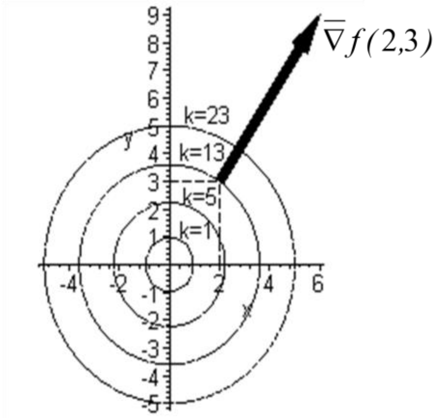
Ejercicio 36. Dada la función $f(x,y) = ye^{xy}$, (a,b)=(0,1) determine:

a) La aproximación de primer orden en (a,b) y utilícela para calcular f (0,1; 1,2).

b) La aproximación de segundo orden en (a,b) y utilícela para calcular f (0,1; 1,2).

c) Compare los resultados anteriores con el valor exacto de f (0,1; 1,2).

Ejercicio 37. Observe las siguientes curvas de nivel $f(x,y) = k$ de una función diferenciable. Complete.



a) f(2,3) = ...

b) si $\overline{\nabla} f(2,3) = [4,6]$, $f_x(2,3) = ...$ y $f_y(2,3) = ...$

c) ¿ Cuál es el valor de la derivada direccional máxima en (2,3) y en qué dirección se da?

d) Halle una aproximación lineal de la función en un entorno de (2,3). Estime el valor de la función f en (2.1, 2.9).

e) Si la función tiene un único extremo, ¿presenta en (0,0) un máximo ó un mínimo?, Justifique

f) Elija uno de los siguientes gráficos para la función $z = f(x,y)$. Justifique con dos argumentos distintos.

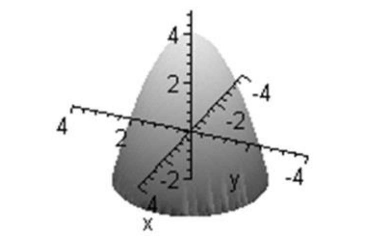


Figura a

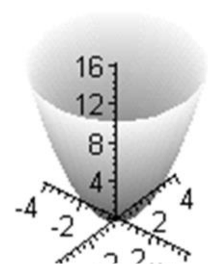


Figura b

Ejercicio 38.

a) Defina extremo relativo y absoluto de $z = f(x,y)$ en $P_0(x_0, y_0)$.

b) ¿Qué analiza para saber si tiene un máximo o un mínimo?

c) Enuncie las condiciones necesaria y suficiente de extremo relativo. ¿Por qué analiza el signo del Hessiano?

Ejercicio 39. Calcule y clasifique los extremos de las siguientes funciones:

$a)\ f(x,y)=\frac{1}{3}\left(x^3+y^2\right)-2x^2+y+1$ $\qquad b)\ f(x,y)=x^2+y^2+xy+6x+1$

$c)\ f(x,y)=x^3+y^3-3x^2-12y+2$ $\qquad d)\ f(x,y)=2x^2+xy^2+6x^2+y^2$

$e)\ f(x,y)=x^3+xy^2$ $\qquad f)\ f(x,y)=xy^2+6xy+\frac{x^2}{2}$

Grafique las funciones de los apartados anteriores y verifique los extremos encontrados.

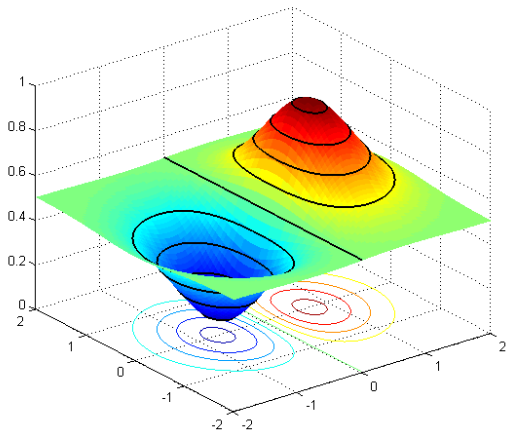
Ejercicio 40. Las siguientes figuras corresponden a la función $z=x\exp\left(-x^2-y^2\right)$. Analícelas y concluya:

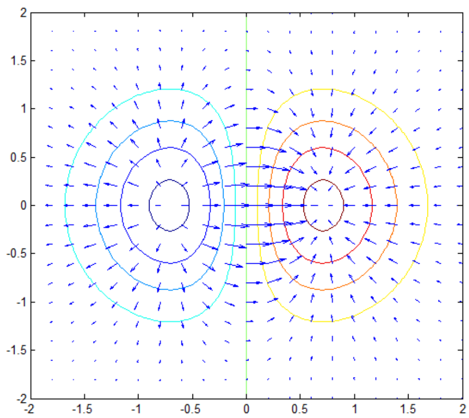
a) ¿Qué puede observar respecto de la relación entre el vector gradiente y la curva de nivel?

b) ¿Si se ubica en un punto dado de la superficie en qué dirección puede observar que aumenta más rápidamente? ¿Y en cual disminuye más rápidamente?

c) ¿Cuánto vale el gradiente en los puntos extremos de la función?

d) Clasifique dichos extremos ¿Qué puede decir respecto del plano tangente en estos puntos?





Ejercicio 41. a) Observe el mapa de contorno y el campo gradiente de las siguientes funciones, clasifique los extremos de las mismas.

b) ¿Algunos de estos mapas de contorno corresponden a las funciones del ejercicio 30? Señale cuáles.

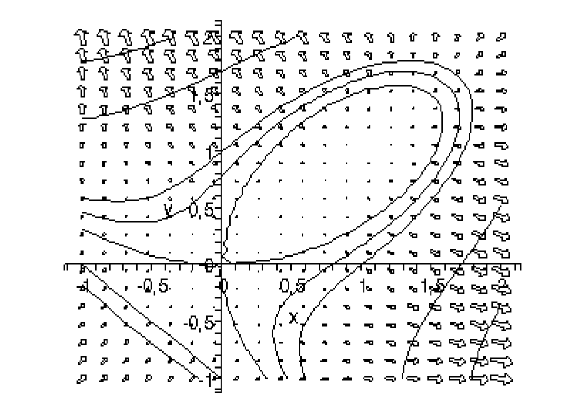


Figura I

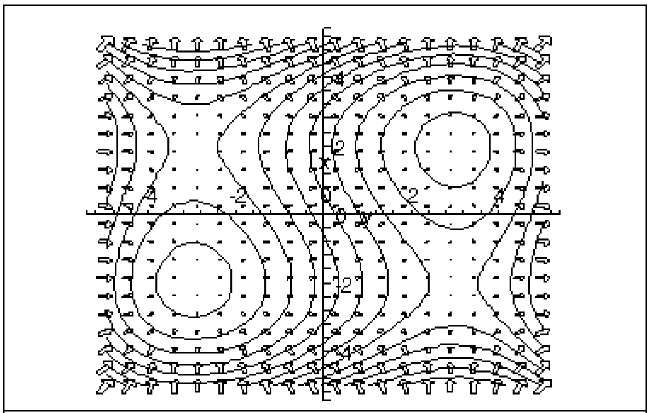


Figura II