INTEGRALES DE LÍNEA

1 - Introducción

Las integrales de línea son importantes en Matemática Aplicada y Básica. Se presentan al estudiar el concepto de trabajo, la energía potencial, el flujo de calor, la circulación de fluidos y otros problemas físicos en los que se analiza el comportamiento de un campo escalar o vectorial a lo largo de una curva.

I → D

La integral es línea es similar a una integral simple: $\int_a^b f(x)\,dx$ excepto porque no se integra en un intervalo [a,b], se integra sobre una curva C, este es el dominio de integración, D, y el integrando, I, puede ser un campo escalar o un campo vectorial.

Por esto estudiaremos cada caso posible, comenzando con el camino de integración, la curva C, luego las integrales de campos vectoriales y las integrales de campos escalares.

2 – Dominio de integración

Imagine que una partícula se mueve a lo largo de la curva C mostrada en la figura 1. Es imposible describir C por una ecuación de la forma $y = f(x)$ porque C es una función multiforme (no cumple con la prueba de la recta vertical). Pero las coordenadas x e y de la partícula son funciones del tiempo, t, por ejemplo,y por tanto, se puede expresar por medio de $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Este par de ecuaciones suele ser una forma más conveniente de describir una curva y da lugar a la siguiente definición.

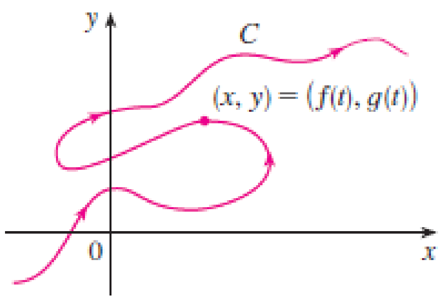


Figura 1

Suponga que x e y se dan como funciones de una tercera variable t (llamada **parámetro**) mediante las ecuaciones $x = f(t)$ e $y= g(t)$ (llamadas **ecuaciones paramétricas**). Cada valor de t determina un punto (x, y), que se puede representar en un plano coordenado. Cuando t varía, el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ varía y traza una curva C, que llamamos curva paramétrica. El parámetro podría identificarse con una letra distinta a t. Pero en muchas aplicaciones de curvas paramétricas, t denota el tiempo y, por tanto, se puede interpretar a $(x, y) = (f(t), g(t))$ como la posición de una partícula en el tiempo t.

Ejemplo: Bosqueje e identifique la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 2t \quad , \quad y = t + 1$$

Solución: Cada valor de t da un punto sobre la curva, como se muestra en la tabla.

En la figura 2 se grafican los puntos (x, y) determinados por varios valores del parámetro t , uniendolos se genera una curva.

t	x	y
−2	8	−1
−1	3	0
0	0	1
1	−1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

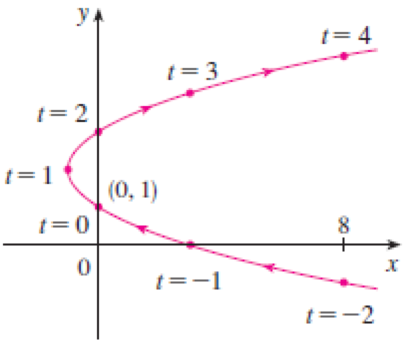


FIGURA 2

Una partícula cuya posición está dada por las ecuaciones paramétricas, se mueve a lo largo de la curva en la dirección de las flechas a medida que t aumenta. Nótese que los puntos consecutivos marcados en la curva aparecen en intervalos de tiempo iguales, pero no a distancias iguales, por la forma de las ecuaciones paramétricas de x e y. En el ejemplo 1 no se restringe el parámetro t, así que asumimos que t puede ser cualquier número real. Pero algunas veces restringiremos a t a un intervalo finito. Por ejemplo, la curva paramétrica con $0 \leq t \leq 4$, que se ve en la figura 3 es la parte de la parábola del ejemplo 1 que empieza en el punto (0, 1) y termina en el punto (8, 5). La punta de la flecha indica la dirección en que se ha trazado la curva cuando t se incrementa de 0 a 4. En general, la curva con ecuaciones paramétricas $x= f(t)$ e $y = g(t)$ con $a\leq t \leq b$ tiene un punto inicial (f (a), g(a)) y un punto terminal (f (b), g(b)).

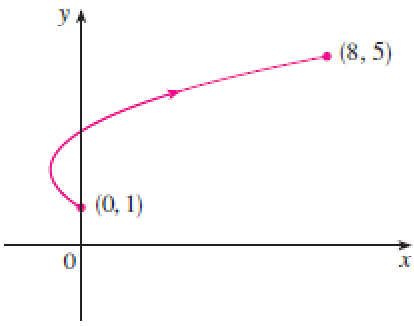
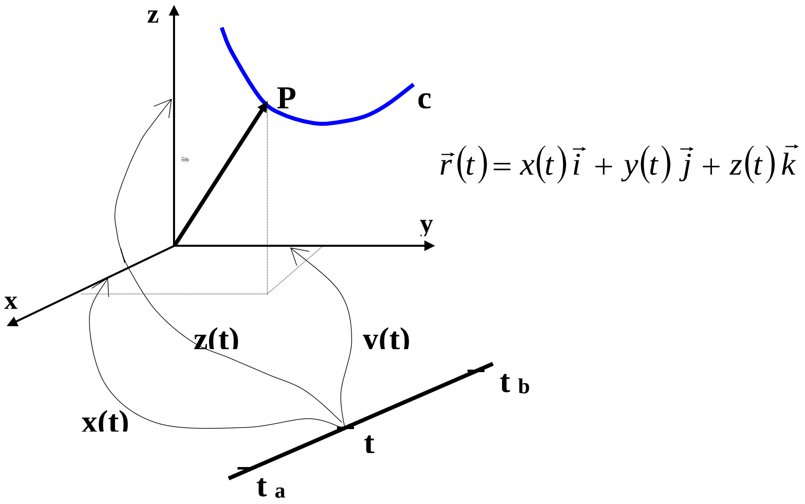


FIGURA 3

2.1. Parametrización de curvas.

Si x(t), y(t), z(t) son funciones continuas, entonces el conjunto C de los puntos del espacio, (x,y,z), donde x=x(t) , y=y(t) , z=z(t) , se denomina **curva en el espacio**. Estas ecuaciones se denominan ecuaciones paramétricas de C y t es el parámetro.

Se considera **vector posición de una curva** en el espacio a, $\vec{r}(t)=x(t)\,\vec{i}\,+\,y(t)\,\vec{j}\,+\,z(t)\,\vec{k}$ cuyo origen coincide con el origen de coordenadas y su extremo es el punto P de la curva C, cuya ecuación paramétrica es $\vec{r}=\vec{r}(t)$, t es un parámetro lineal que se mueve en el intervalo [a , b]. **la curva resulta trazada por el extremo del vector posición**.

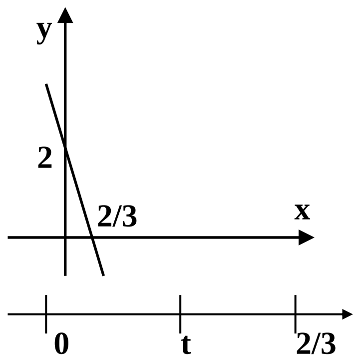


Algunas ecuaciones de curvas en forma paramétrica y vectorial a partir de la ecuación cartesiana en R^2.

a) Para la **recta** y = -3x + 2

la representación vectorial es

$$\vec{r}(t)=t\,\vec{i}\,+(-3t+2)\,\vec{j}$$



y la paramétrica

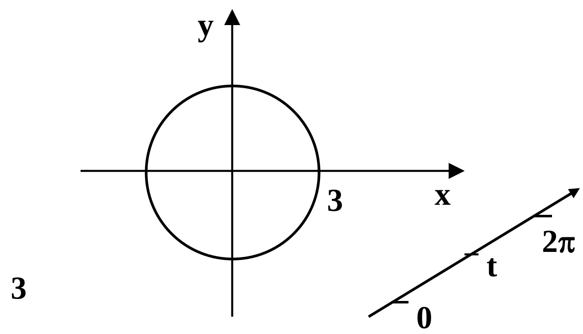
$$C(t)=\begin{cases} x=t \\ y=-3t+2 \end{cases}$$

b) Para la **circunferencia** de radio 3 y centro en el origen es $x^2+y^2=9$

la representación vectorial es

$$\vec{r}(t)=3\cos t\,\vec{i}\,+3\,sent\,\vec{j}$$

y la paramétrica es



$$C(t)=\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\,\text{sen}\,t \end{cases}$$

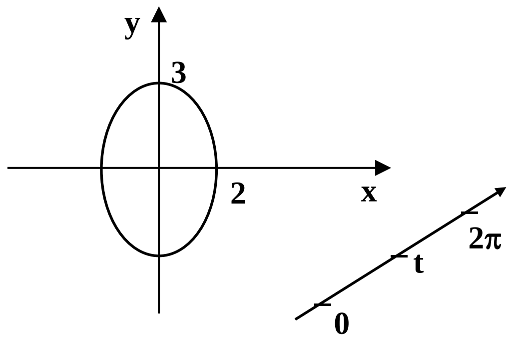
c) Para la **elipse** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

la representación vectorial es

$$\vec{r}(t)=2\cos t\,\vec{i}+3\,\text{sen}\,t\,\vec{j}$$

y la paramétrica es

$$C(t)=\begin{cases} x=2\cos t \\ y=3\,\text{sen}\,t \end{cases}$$

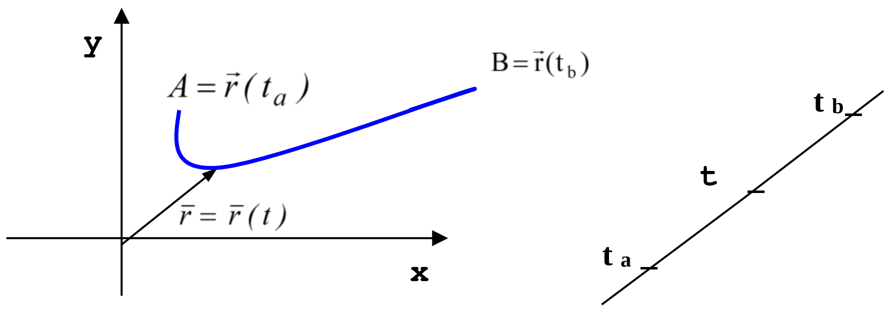


2.3. Definiciones de curvas

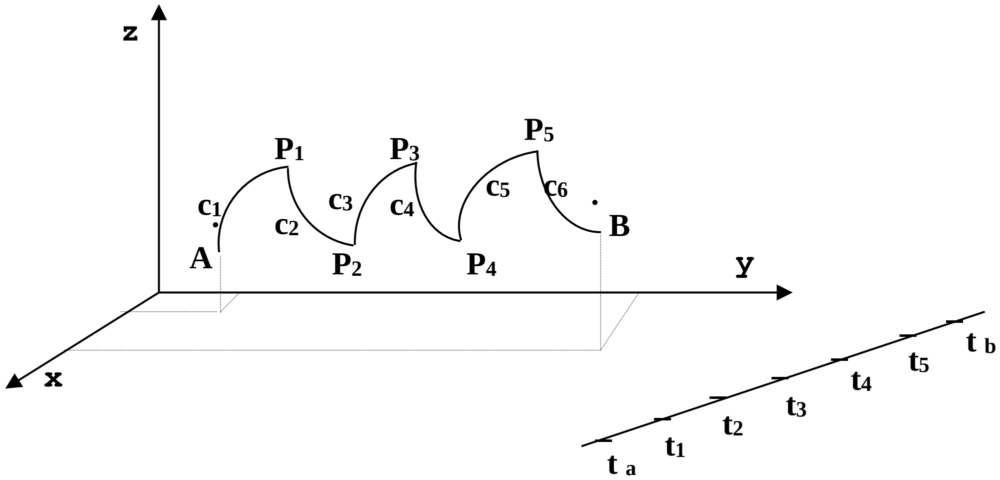
El campo vectorial $\vec{r}=\vec{r}(t)$ *en* $[t_a, t_b]$ define una curva si $\vec{r}(t)$ es un campo vectorial continuo en $[t_a, t_b]$.

Definición de curva regular o suave: El campo vectorial continuo $\vec{r}=\vec{r}(t)$ *en* $[t_a, t_b]$ define una curva regular si tiene derivadas continuas y no simultáneamente nulas en $[t_a, t_b]$. Esto implica que su gráfica no tiene partes salientes o puntas. La curva tiene tangente definida en cada punto y la tangente cambia de dirección a medida que recorre la curva.

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j} \qquad t\in[t_a, t_b]$$



Definición de camino o curva regular a trozos: El camino o curva se llama regular a trozos si el intervalo $[t_a , t_b]$ puede descomponerse en un número finito de subintervalos tal que en cada uno de ellos el camino sea regular.



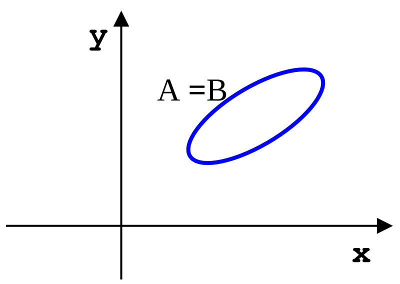
$$[t_a , t_b] = [t_a , t_1] \cup [t_1 , t_2] \cup [t_2 , t_3] \cup [t_3 , t_4] \cup [t_4 , t_5] \cup [t_5 , t_b]$$

La gráfica anterior representa una curva regular a trozos, ya que $\vec{r}\,(t)$ es continua en los respectivos intervalos abiertos (t_a,t_1), (t_1,t_2), etc.

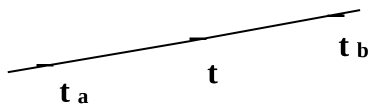
Definición de curva cerrada: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ define una curva cerrada en $[t_a , t_b]$ si $\vec{r}(t_a) = \vec{r}(t_b)$.

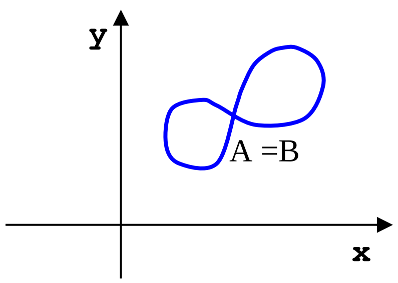
Definición de curva cerrada simple: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ define una curva cerrada simple si $\vec{r}(t)$ para todo t distinto de t_a y t_b origina puntos distintos de C y $\vec{r}(t_a) = \vec{r}(t_b)$.

Las curvas cerradas simples se llaman también curvas de Jordán



Curva cerrada simple

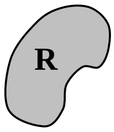




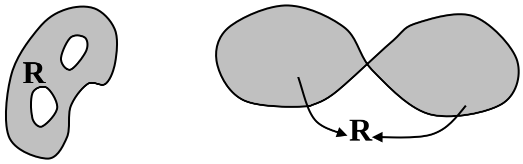
Curva cerrada no simple

Las curvas que se consideran como dominio de integración son las curvas simples, pueden ser cerradas o no.

Definición: Una región plana R es simplemente conexa si su contorno consta de una única curva cerrada simple.



Simplemente conexa



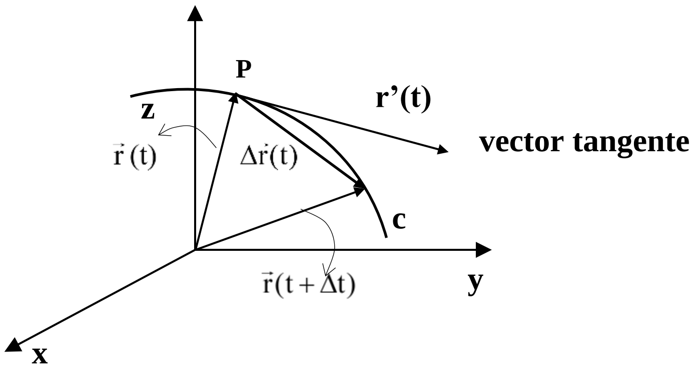
No simplemente conexa

2.4. Derivadas de r(t) (campo vectorial que define una curva)

Dado $\vec{r}(t)$, campo vectorial de variable escalar, siendo el vector posición que describe punto a punto la curva C, la **derivada primera** de este campo respecto de t es:

$$\boxed{\vec{r}'(t) = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}}$$

y **representa geométricamente un vector en la dirección de la tangente a la curva definida por $\vec{r} = \vec{r}(t)$, en el punto P.**



Nota: En el caso en que t represente el tiempo $\vec{r}'(t)$ se interpreta como velocidad instantánea y su módulo es:

$$\left\| \vec{r}'(t) \right\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

La **derivada segunda** de $\vec{r}(t)$ respecto de t es: $\vec{r}''(t) = x''(t)\,\vec{i} + y''(t)\,\vec{j} + z''(t)\,\vec{k}$

es la derivada primera de la velocidad y se interpreta como aceleración instantánea

Vector Tangente Unitario

Sea C una curva regular representada por $\vec{r} = \vec{r}(t)$ en un intervalo [a , b] . Si || $\vec{r}^{\,'}(t)$ || ≠ 0, el vector tangente unitario (o versor tangente) es: $\vec{t} = \dfrac{\vec{r}^{\,'}(t)}{\left\| \vec{r}^{\,'}(t) \right\|}$

Si en lugar del parámetro lineal t se utiliza como **parámetro la longitud de arco** s = $\int_0^t \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$, que mide la distancia a lo largo de C desde algún punto fijo de ella, este parámetro recibe el nombre de parámetro intrínseco de la curva. La ecuación vectorial de la curva C en R^3 es:

$$\vec{r}(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j} + z(s)\,\vec{k}$$

Nota: Por convención cuando se trabaja con este parámetro se adopta para expresar la derivada respecto del parámetro “s” la notación

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}^{\,'}(s)$$

y para un parámetro cualquiera t (que puede ser tiempo) se utiliza

$$\frac{\boldsymbol{dr}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{\vec{r}'(t)}$$

Una de las ventajas de utilizar el parámetro s es que el vector derivado $\vec{r}^{\,'}(s)$, que es tangente a la curva C, tiene módulo 1.

$$\left\| \vec{r}^{\,'}(s) \right\| = 1$$

3 – Campos Vectoriales

Recordando conceptos ya vistos:

Un campo vectorial sobre un dominio en el plano o en el espacio es una función que asigna un vector a cada punto en el dominio.

3.1- Tipos de campos vectoriales

Un campo de vectores bidimensionales $\vec{F} : R^2 \mapsto R^2$

$$\overline{\boldsymbol{x}} \to \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}(\overline{\boldsymbol{x}})$$

es de la forma $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, con $\vec{x} = (x,y)$

Un campo de vectores tridimensionales $\vec{F}: \quad R^3 \mapsto R^3$

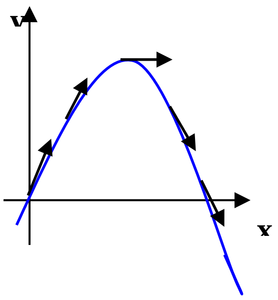
$$\vec{x} \mapsto \vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$$

Es de la forma $\overline{\boldsymbol{F}}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \overline{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\bar{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\bar{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\overline{\boldsymbol{k}}$ con $\overline{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$

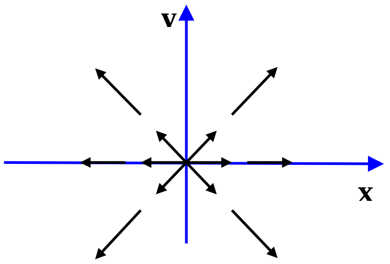
Un campo vectorial es continuo si sus componentes P, Q y R son continuas, es diferenciable si sus componentes lo son. Se observa que sus componentes son funciones escalares.

Ejemplos:

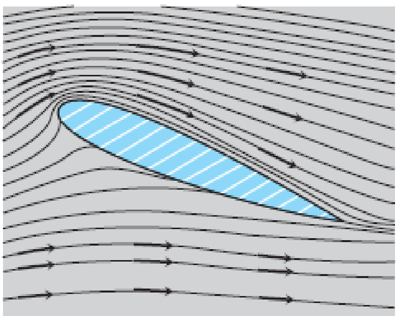
a) si se grafica el vector velocidad del proyectil en cada punto de su trayectoria en el plano de movimiento, se tiene un campo bidimensional definido a lo largo de la trayectoria.



Los vectores velocidad $\vec{v}(t)$ del movimiento de un proyectil forman un campo vectorial a lo largo de la trayectoria.



b) El campo radial $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ de los vectores de posición de puntos en el plano.



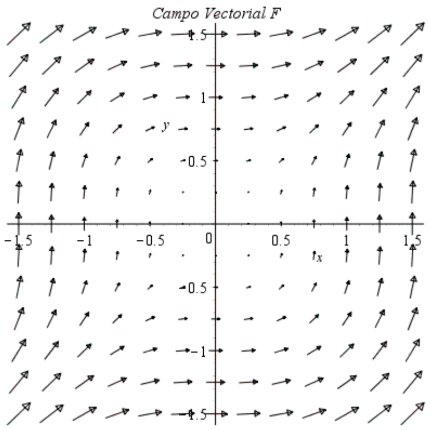
c) Un ejemplo de campo vectorial es la corriente de aire. En la figura se observan los vectores velocidad de un fluido alrededor de una superficie de sustentación en un túnel de viento . Las líneas indican la dirección del campo en cada punto. Su intensidad la representa el número de líneas por unidad de superficie transversal que hay en el entorno de cada punto.

d) Otro ejemplo de campo vectorial es el llamado campo de fuerzas, que asocia un vector de fuerza a cada punto de la región, como es el campo gravitacional terrestre.

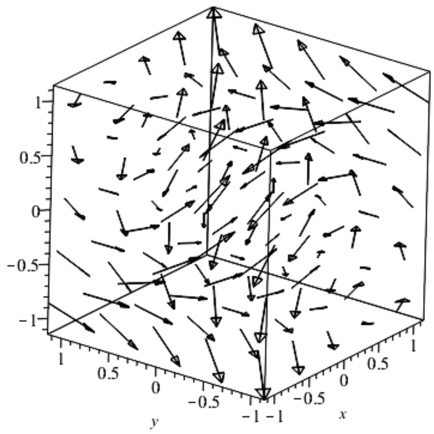
Para obtener una mejor representación de un campo vectorial usamos programas computacionales como el Maple, porque con ellos podemos trazar un gran números de vectores representativos. Es casi imposible trazar a mano la mayor parte de los campos vectoriales tridimensionales, por lo que se hace necesario el uso de un software para su visualización.

Por ejemplo:

$\overline{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{ln}(\mathbf{1}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}})\,\bar{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{ln}\,(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})\bar{\boldsymbol{\jmath}}$

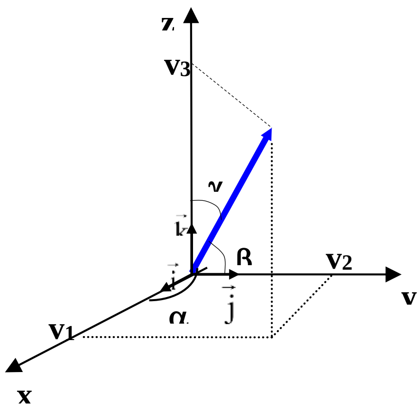


$\overline{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y}\,\bar{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{z}\,\bar{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{x}\,\overline{\boldsymbol{k}}$



3.2 - Operaciones con vectores.

En el espacio es conveniente caracterizar un vector por los ángulos que forma con los tres vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, como se muestra en la figura.



Los ángulos α, β, γ se llaman ángulos directores del vector $\vec{v}$; $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ se llaman cosenos directores del vector $\vec{v}$.

Si $\bar{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$ se tiene:

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\vec{v}\|} \quad , \quad \cos\beta = \frac{v_2}{\|\vec{v}\|} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{v_3}{\|\vec{v}\|}$$

en consecuencia

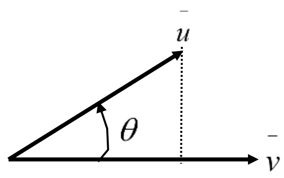
$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{v_1}{\|\vec{v}\|}\vec{i} + \frac{v_2}{\|\vec{v}\|}\vec{j} + \frac{v_3}{\|\vec{v}\|}\vec{k} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

el vector anterior es unitario, luego el módulo es: $\sqrt{(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)} = 1$

I - Producto Escalar:

Sea:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad y \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\ \cos\theta$$

θ es el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$.

$\boldsymbol{\bar{u}\,.\bar{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_2.v_2}$

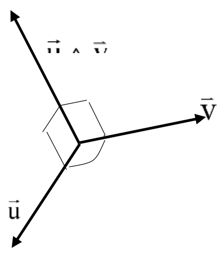
Dos vectores son perpendiculares si y solo si $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

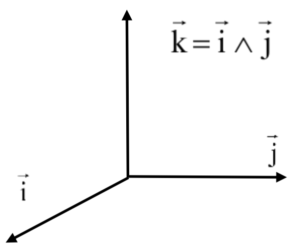
II - Producto vectorial

Sea $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad y \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

es un vector perpendicular al plano determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$





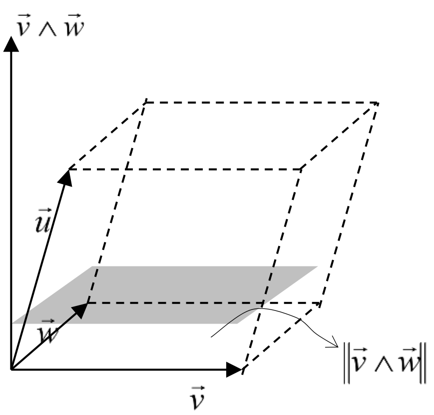
III - Producto Mixto

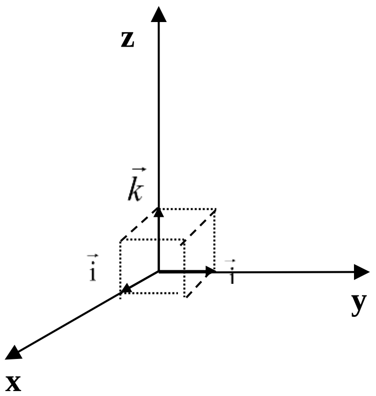
Sea:

$$\vec{u} = (u_1, u_{2,} u_3) \quad ; \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad ; \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

$$\vec{u} \,.\, (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Si los vectores no están en el mismo plano, el producto mixto permite calcular el volumen V, del paralelepípedo cuyos lados adyacentes son $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, como se indica en la figura siguiente





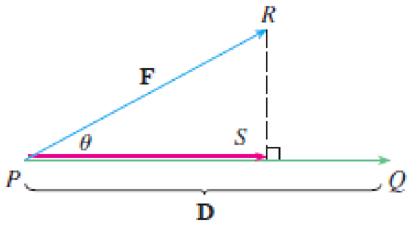
Así el volumen V se calcula: $V = |\, \vec{u} \,.\, (\vec{v} \wedge \vec{w}) \,|$

4 - Integral de linea de campos vectoriales

Se define la integral de línea o integral curvilínea a partir del **concepto de trabajo**.

Fueron inventadas a principios del siglo XIX para resolver problemas relacionados con el flujo de fluidos, fuerzas, electricidad y magnetismo.

Se ha visto en Física, que cuando una fuerza constante F desplaza un objeto una distancia d, en la misma dirección de la fuerza, el trabajo (mecánico) realizado se define como el producto:



W = F . D

Ahora bien, **si F(x) es una fuerza variable continua en magnitud pero no dirección**, que actúa a través de un intervalo [*a* , *b*], donde F(x) representa la fuerza en un valor x del intervalo, el trabajo W realizado por la fuerza al mover un objeto de un punto *a* hasta un punto *b* se define como:

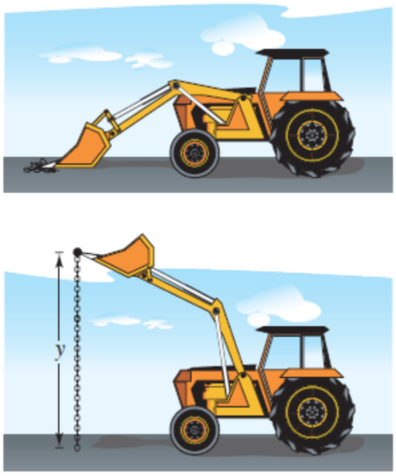
$$W = \int_a^b F(x)\,dx$$

Nota: si F(x) = k, k=cte, para todo x en el intervalo entonces:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx = kx\Big|_a^b = k(b-a) = Fd\cdot$$

Un ejemplo de esto es:

Una cadena de 10 metros pesa 5 kg por m está extendida en el suelo. ¿Cuánto trabajo se requiere para levantar un extremo de la cadena a una altura de 10 m para que esté totalmente extendida, como se muestra en la figura?



Trabajo requerido para izar un extremo de la cadena

Solución: Imaginar que la cadena es dividida en secciones pequeñas, cada una de longitud Δy. Entonces el peso de cada sección es el incremento de fuerza

$$\boldsymbol{\Delta F = 5\,\frac{kg}{m}\,.\Delta y = 5\Delta y}$$

Porque una sección común (inicialmente en el suelo) se levanta a una altura de y, el incremento de trabajo es

$$\boldsymbol{\Delta W = incremento\ de\ fuerza\,.distancia = 5\Delta y\,.y}$$
$$\boldsymbol{= 5\,y\,\Delta y}$$

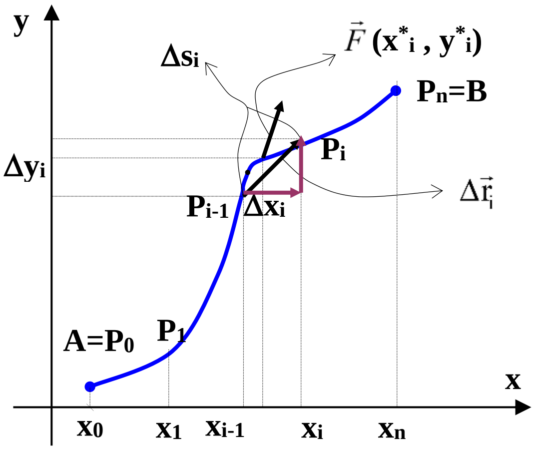
Porque y va de 0 a 10, el trabajo total es

$$\boldsymbol{W = \int_0^{10} 5y\,dy = \frac{5y^2}{2}\Big|_0^{10} = 250\ kgm^2}$$

En general, un campo vectorial $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ **que actúa en cada punto de una curva regular a trozos C:** $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\,\vec{j}\ ,\ a \le t \le b$**, varia tanto en dirección como en magnitud**.

Si A y B son los puntos *(x(a),y(a))* , *(x(b),y(b))* respectivamente, nos preguntamos : ¿cuál es el trabajo realizado por $\overline{\mathrm{F}}$ cuando su punto de aplicación se desplaza a lo largo de la curva C, del punto A al punto B?

Supongamos que la curva C se divide en n subarcos, en cada uno de ellos la fuerza en un punto intermedio es una fuerza constante, bajo este esquema utilizamos el concepto de trabajo.



1. Se divide la curva C en n segmentos cortos por medio de los puntos $P_0, P_1, \cdots, P_n$

   Que dan lugar a: • n–subarcos de longitud Δs_i el subarco i-esimo

   • n–segmentos de longitud $\Delta \vec{r}_i$ correspondiente al subarco i-esimo

   Se toma en cada subarco un punto intermedio (x_i^*, y_i^*).

2. El trabajo en cada subarco, como vamos a tomar la fuerza constante, ya que estos subarcos tienden a cero es: $\vec{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta s_i \underset{\text{pues } \Delta s_i \to 0}{\cong} \vec{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta \vec{r}_i$.

3. Se suma sobre cada subarco, quedando así el trabajo sobre el arco AB aproximadamente igual a la $\sum \vec{F}(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta \vec{r}_i$

4. Se toma límite (suponiendo que existe) cuando la norma de la partición tiende a cero, $\| \Delta \vec{r} \| = max\{\Delta \vec{r}_i\} \to 0$.

5. Se define a este límite como el trabajo realizado por una fuerza a lo largo de una curva

$$\boxed{W = \lim_{\| \Delta r \| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x_i^*, y_i^*) \Delta \vec{r}_i \underset{def}{=} \int_a^b \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} . d\vec{r}}$$

INTEGRAL DE LINEA DE CAMPOS VECTORIALES

Para el cálculo se recuerda que:

1. Se debe tomar la fuerza $\vec{F}(x,y)$ sobre los puntos de la curva C, los que están representados por $\vec{r} = \vec{r}(t)$, quedando la función compuesta $\vec{F}(\vec{r}(t))$.
2. Se debe calcular $d\vec{r}$ teniendo en cuenta que si $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$ luego

   $\underline{d\vec{r}} = x'(t)\,dt\,\vec{i} + y'(t)\,dt\,\vec{j} \underset{dt=\Delta t=cte}{=} \left[x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j}\,\right]dt = \underline{\vec{r}\,'(t)\ dt}$
3. Se substituye en la expresión de la integral obtenemos:

$$\boxed{\int_C \bar{F}(x,y)\cdot d\bar{r} = \int_C \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot \bar{r}'(t)\,dt}$$

La magnitud de la integral no está influida por la parametrización que se use, pero el signo está influido por la orientación que se utilice al recorrer la curva C.

Ejemplo 1: Calcular el trabajo realizado por la fuerza $F(x,y,z) = xy^2\bar{i} + (y - z)\,\bar{j} + z\,\bar{k}$ a lo largo de la hélice cilíndrica de ecuación $x = \cos(t)$, $y = \text{sen}(t)$, $z = t$ considerando tres vueltas de la hélice, iniciando en el plano xy.

Solución

$$W = \int_c \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^{6\pi} (-\cos t\ \text{sen}t^3 + \cos t\ \text{sen}t - t\cos t\ + t)\,dt = 177.652879$$

El desarrollo de este ejercicio, realizado con Maple, se encuentra en el ANEXO de Integrales de Línea.

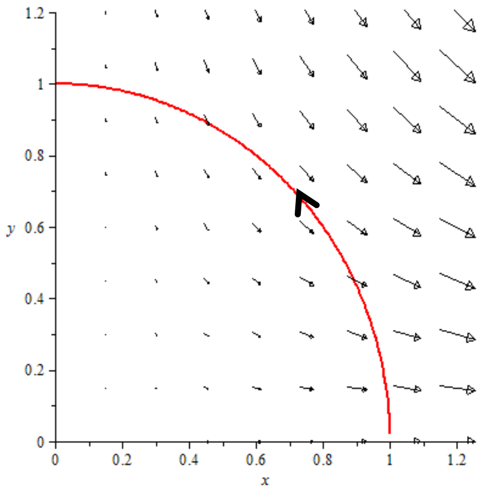
Ejemplo 2: Determinar el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\bar{F} = x^2\bar{\imath} - x\,y\,\bar{\jmath}$ cuando mueve una partícula a lo largo del cuarto de circulo $x^2 + y^2 = 1$ desde el punto (1,0) al punto (0,1). C está descripta paramétricamente por $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}$, desde t = 0 hasta $t = \frac{\pi}{2}$.

Solución: La función vectorial $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ dada, determinan las ecuaciones paramétricas

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = sen\,t \end{cases} \qquad \mathrm{F}[\bar{r}(t)] = cos^2 t\,\bar{\imath} - \cos t\ sen\,t\,\bar{\jmath}$$

$$\bar{r}'(t) = -sen\,t\,\bar{\imath} + \cos t\,\bar{\jmath}$$

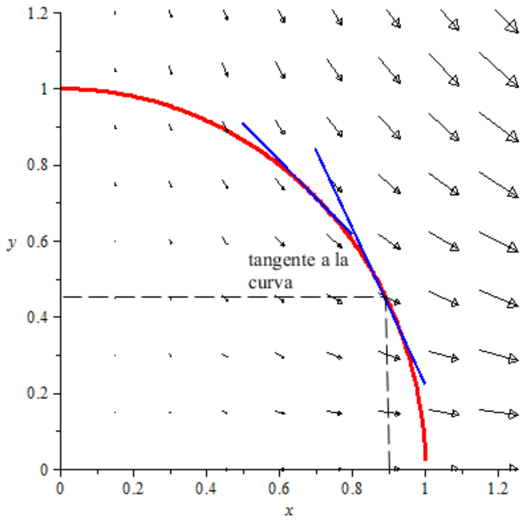
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2cos^2 t\ sen\,t)dt = 2\frac{cos^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}$$



La figura muestra el campo de fuerzas y la curva (que es la trayectoria de la partícula).

El trabajo hecho es negativo porque el campo se opone (frena) el movimiento a lo largo de la curva en el sentido dado.

Las **líneas de flujo o líneas de corriente de un campo vectorial** son las trayectorias que sigue una partícula cuyo campo de velocidades es el campo vectorial dado. Geométricamente, una línea de flujo para un campo vectorial F es una curva (línea) trazada sobre el dominio de F de manera que el vector tangente a esta curva (línea) en cada punto coincide con el campo vectorial. Por lo tanto los vectores en un campo vectorial son tangentes a las líneas de flujo.



$\int F.dr = \int F[r(t)]\,.\,r'(t)\,dt$

Recuerde que el producto F[r(t)]. r´(t) es el producto de la componente de F en la dirección del vector tangente a la curva(r'(t)). Esto quiere decir que, a medida que es más cercana la dirección de F a la dirección del vector tangente, más grande es el producto entre ellos.

El vector tangente r'(t) señala la dirección en que se mueve una partícula en determinado instante, por lo tanto la norma de ese vector es la rapidez de movimiento.

Analizando estos conceptos en el ejemplo se comprueba el valor del trabajo.

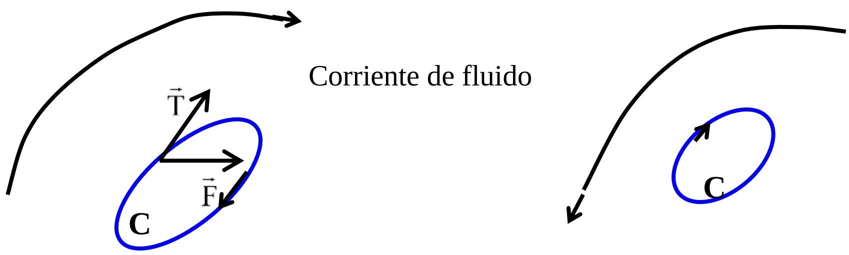
4.1. Circulación

La integral de línea de un campo vectorial $\vec{F}$ alrededor de una curva cerrada simple C se dice que es la circulación de $\vec{F}$ en C ; esto es:

$$\boxed{circulación \underset{def}{=} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

En particular, si $\vec{F}$ es un campo de velocidades de un fluido, entonces la circulación es una medida de la cantidad con la cual el fluido tiende a hacer girar la curva C en sentido opuesto al del reloj.

Por ejemplo, si $\vec{F}$ es perpendicular a $\vec{T}$ en todo (x,y) de C, entonces $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ y la curva no se mueve.



Nota:

si $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$ significa que el fluido tiende a hacer girar C en sentido antihorario

si $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$ significa que el fluido tiende a hacer girar C en sentido horario.

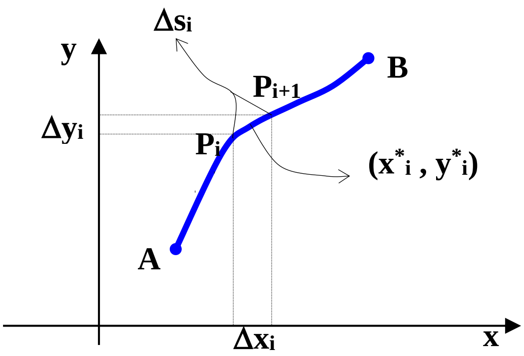
5 – Integral de línea para campos escalares

Definición: Una curva dada en forma paramétrica es $\vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, se dice rectificable si tiene longitud s finita, siendo:

$$\boxed{s = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(x^{'}(t)\right)^2 + \left(y^{'}(t)\right)^2}\, dt}.$$

Volviendo al tema que nos ocupa, se define la integral de línea para campos escalares utilizando el concepto de masa de un alambre de longitud finita, con un esquema similar al utilizado en integrales de línea para campos vectoriales.

Sea $\vec{r} = \vec{r}(t)$ una curva regular a trozos cuya gráfica es C y u = f (x,y) un campo escalar definido y acotado en C, que representa la densidad lineal (por ejemplo en gramos por cm) se procede:



1. Dividimos la curva por medio de puntos $P_0, P_1, \cdots, P_n$

   Que dan lugar a:
   - n–subarcos de longitud Δs_i el subarco i-esimo
   - n–segmentos de longitud Δr_i correspondiente al subarco i-esimo
2. Tomamos en cada subarco un punto intermedio (x_i^*, y_i^*).
3. La masa en cada subarco es aproximadamente $f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$ (recuerde que masa es igual a densidad por unidad de longitud)
4. Tomamos $\sum f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$, lo que nos da aproximadamente la masa del alambre
5. Tomamos limite (suponiendo que exista) cuando la norma de la partición tiende a cero, $\| \Delta r \| = \max\{\Delta s_i\} \to 0$.
6. **Se define** a ese limite como la masa de un alambre de longitud finita y cuya integral es:

$$M = \lim_{\|\Delta r\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i \underset{def}{=} \int_C f(x,y)\, ds$$

Se recuerda que **el diferencial arco para una curva C** representada representada en forma vectorial está dada por por $\vec{r}(t)= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, es

$$\boxed{ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt = \| r'(t) \|\, dt}$$

Luego la integral de línea se calcula:

$$\boxed{\int_C f(x,y)\,ds = \int_C f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_C f(\vec{r}(t))\,\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt}$$

Con un razonamiento similar se trabaja en el espacio:

Dado el campo escalar $f(x,y,z)$ *y la curva* $C:\ \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ obteniendo:

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_C f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_C f(\vec{r}(t))\,\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt$$

Ejemplo 3: Calcular la masa de un alambre cuya densidad es f(x,y) =x, siendo C: y = x^2 entre los puntos de coordenadas (-4,16); (-1,1)

Solución: Se parametriza la curva para obtener la expresión del *ds*

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} , \qquad \vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} \ ; \ \vec{r}\,'(t) = 1\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} \qquad \text{Luego} \quad \|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$$

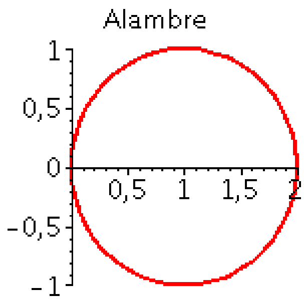
Se determina la función compuesta $f(\vec{r}(t)) = t$

Se calcula $$\int_C x\,ds = \int_{-4}^{-1} t\sqrt{1+2t^2}\,dt = \frac{1}{12}\left(5^{\frac{3}{2}} - (65)^{\frac{3}{2}}\right)$$

Ejemplo 4: Calcular la masa de un alambre que tiene la forma de circunferencia de ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y densidad d = x.

Solución:

$$\int_C x\,ds = \int_0^{2\pi} (1+\cos t)\sqrt{\left(\frac{d}{dt}(1+\cos t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\operatorname{sen} t\right)^2}\,dt = 2\pi$$



Nota: El desarrollo de este ejercicio, en Maple, se encuentra en el ANEXO de Integrales de Línea.

Si *f(x,y) = 1* la integral de línea es igual a la longitud de la curva C.

La magnitud de la integral de línea no esta influida por la parametrización que se use para la curva C. Para dos parametrizaciones distintas de C, recorriendo la curva en el mismo sentido, el resultado de las integrales es igual. Pero si esta influenciado el resultado de la integral por el sentido de circulación que se utilice al recorrer la curva C. Si se recorre en el sentido –C, entonces: $\int_{-c} \boldsymbol{f(x,y)ds} = -\int_{c} \boldsymbol{f(x,y)ds}$

6 – Teoremas fundamentales del cálculo integral para integrales

Se recuerda el enunciado del **Primer Teorema Fundamental del Calculo Integral** para funciones escalares de una variable visto en Cálculo I.

Dada $f(x)$ definida y continua en [a,b] y la función $\phi(x) = \int_a^x f(x)dx$, entonces $\phi'(x) = f(x)$

El teorema equivalente para campos vectoriales es:

6.1. Primer teorema fundamental del cálculo integral para integrales de línea.

Sea $\vec{F}(\vec{x}): R^2 \to R^2$ un campo vectorial continuo, de la forma $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, que admite derivadas parciales primeras. Sea $\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}\,(\boldsymbol{t})$ la representación paramétrica de un camino regular a trozos contenido en un conjunto D abierto y simplemente conexo, el cual está contenido en el dominio de $\vec{F}$. Si existe un campo escalar $\phi(\vec{x}) \underset{def}{=} \int_{\vec{a}}^{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, entonces $\nabla\phi(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x})$. Con $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

Consecuencia del Teorema:

Para cada campo vectorial $\vec{F}(\vec{x})$ que cumpla con las hipótesis podemos encontrar un campo escalar $\phi(\vec{x})$ tal que $\nabla\phi(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x})$. Por lo que $\phi_x = P(x,y)$ y $\phi_y = Q(x,y)$

Se recuerda el **Segundo Teorema Fundamental del Calculo Integral** para funciones de una variable (Regla de Barrow) visto en Cálculo I dice:

Dada *f (x)* una función continua en [a,b] y *F(x)* una primitiva continua en [a,b] entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

.

El teorema equivalente para campos vectoriales es:

6.2. Segundo teorema fundamental.

Sea $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ un campo vectorial continuo en una región D abierta y conexa en R^2, $\phi(\vec{x})$ un campo escalar continuo con derivadas parciales continuas y $\vec{F} = \nabla\phi = \phi_x \vec{i} + \phi_y \vec{j}$ En estas condiciones, para todo par de puntos A y B en D y para toda curva C regular a trozos que une A con B, el valor de la $\int_C \overline{\boldsymbol{F}}\, \boldsymbol{d}\overline{\boldsymbol{r}}$ es independiente de la trayectoria; o sea:

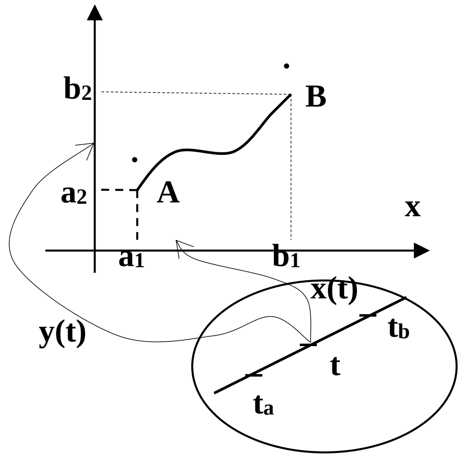
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_A^B \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

Demostración: $\int_C \overline{\boldsymbol{F}}.\ \boldsymbol{d}\overline{\boldsymbol{r}} = \int_C (\boldsymbol{P}\ .\boldsymbol{dx} + \boldsymbol{Q}\ \boldsymbol{dy})$

Por hipótesis : $\boldsymbol{P} = \emptyset_{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{Q} = \emptyset_{\boldsymbol{y}}$

$$\int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \emptyset_{\boldsymbol{x}}\ \boldsymbol{dx} + \emptyset_{\boldsymbol{y}}\ \boldsymbol{dy} =$$

si $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = x'(t)dt \\ dy = y'(t)dt \end{cases}$



$$\int_A^B (\emptyset_x\, x' + \emptyset_y\, y')\, dt \underbrace{=}_{\text{por regla de la cadena}} \int_{ta}^{tb} \emptyset'\big(\mathbf{x(t), y(t)}\big)\mathbf{dt} \underbrace{=}_{\text{por ser operaciones inversas}} \emptyset(\mathbf{x(t), y(t)})\big|_{\mathbf{ta}}^{\mathbf{tb}} =$$

$$= \phi(x(t_b), y(t_b)) - \phi(x(t_a), y(t_a)) = \phi(B) - \phi(A)$$

7 – Función potencial

Definición: Si $\overline{F} = \overline{F}(x, y)$ es un campo vectorial que cumple las condiciones del Primer teorema Fundamental del Cálculo Integral, esto es que existe la función $\phi(x, y)$ tal que $F(x, y) = \nabla\phi(x, y)$ Entonces a esta función $\phi(x, y)$ se la denomina función potencial.

Para estos campos vectoriales la integral de línea depende solo de los puntos extremos de C, no de la trayectoria (cumplen el Segundo teorema fundamental).

Tales campos son importantes en física y termodinámica, quizas el ejemplo más conocido en física es el campo gravitatorio.

Por lo expuesto anteriormente vemos que es importante saber cuando un campo vectorial es conservativo (o campo gradiente) lo que es sinónimo de admitir función potencial.

Se estudia entonces el teorema de existencia de la Función Potencial, el cual no solo nos dice cuando un campo vectorial admite función potencial sino que nos enseña como encontrarla.

Nota:

1- Se recuerda que para un campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ y una curva representada por $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ cuyo $d\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$ se tiene:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \left[P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}\right]\cdot\left[dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}\right]=$$

$$=\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz \qquad [1]$$

2- Si existe $\phi(x,y,z)$ bajo las condiciones del Teorema de Bonnet (de las derivadas cruzadas) y además $\phi_x=P$, $\phi_y=Q$, $\phi_z=R$ entonces [1] se puede calcular como $\phi(B)-\phi(A)$ y ϕ es función potencial.

Nos preguntamos **¿Cuándo existe la función potencial ϕ? ¿Cómo podemos calcularla?**

7.2. Teorema de existencia de la función potencial

Dado $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ continuo con derivadas parciales primeras y segundas continúas en un conjunto simplemente conexo que contiene a la curva C regular a trozos. **El campo vectorial $\vec{\mathrm{F}}$ admite función potencial ϕ cuya expresión es**

$$\boxed{\phi=\int_a^x P(x,b,c)\,dx+\int_b^y Q(x,y,c)\,dy+\int_c^z R(x,y,z)\,dz \;\; si\; y\; solo\; si \;\; P_y=Q_x,\, P_z=R_x,\, R_y=Q_z}$$

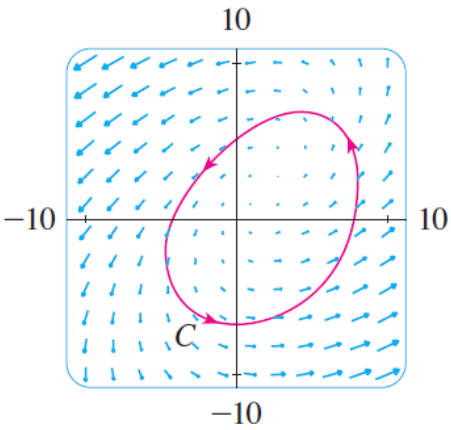
Demostración: Ver ANEXO de Integrales de Línea

La pregunta **<u>¿Cómo es posible determinar si un campo vectorial F es o no conservativo?</u>** Se responde con:

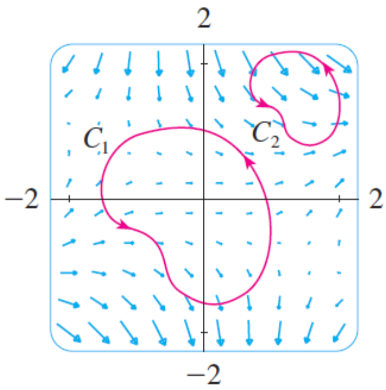
Se supone que **F** = P i + Q j es conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales contínuas de primer orden. Entonces una función ϕ tal que cumple $\boldsymbol{F}=\nabla\boldsymbol{\phi}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{i}+\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{j}$

Por tanto, por el teorema de las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$



a)



b)

En la figura a) los vectores se inician en una curva cerrada C parece que todos apuntan en más o menos la misma dirección de C. Entonces se ve como si $\int \boldsymbol{F.dr} > \boldsymbol{0}$ y por lo tanto F no es conservativo. En b) algunos de los vectores cercanos a las curvas C_1 y C_2 apuntan aproximadamente en la misma dirección de las curvas, mientras que otros apuntan en la direccion opuesta. Entonces parece plausible que las integrales de línea alrededor de todas las trayectorias cerradas sean cero, esto mostraria que F es conservativo.

Ejercicio 5:

a) Analizar si el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\ \vec{i} + \left(x^2 + z^2\right)\vec{j} + 2yz\ \vec{k}$ es o no gradiente de algún campo escalar, en caso afirmativo calcularlo.

b) Calcular el trabajo realizado por el campo vectorial dado para desplazar una partícula material a lo largo de una curva seleccionada por Ud.

Nota: La solución de este ejercicio, con Maple, se encuentra en el ANEXO de Integrales de Línea.

7.3. Campos Vectoriales Conservativos

En conclusión:

Si $\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ es independiente de la trayectoria C, sabemos que existe una función escalar ϕ tal que:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = [P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}]\cdot(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}) = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

en donde $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ es un campo vectorial y $P = \frac{\partial\phi}{\partial x}$, $\mathbf{Q} = \frac{\partial\phi}{\partial y}$.

En otras palabras, **el campo vectorial $\vec{F}$ se denomina campo gradiente o conservativo si existe el campo escalar ϕ, tal que $\vec{F} = \nabla\phi$.**

Las carácterísticas de estos campos son:

1- El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ es independiente del camino de integración.

2- El trabajo realizado por la fuerza a lo largo de una trayectoria cerrada vale cero.

3- El $\boldsymbol{\nabla\, x\, \overline{F} = 0}$

Observación:

1-En un campo conservativo $\overline{\boldsymbol{F}}$ se cumple la ley de la conservación de la energía mecánica: Para una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria en un campo conservativo, se verifica que:

Energía Cinética + Energía Potencial = Constante.

En física la energia potencial es la energia que mide la capacidad que tiene un sistema para realizar un trabajo en función de su posición.

2-Una fuerza de fricción, como la resistencia del aire, es no conservativa. Las fuerzas no conservativas son disipativas en el sentido de que su acción reduce la energía cinética sin un aumento correspondiente en la energía potencial. En otras palabras, si el trabajo realizado por $\int_C \vec{F}\,.\,d\vec{r}$ depende de la trayectoria, entonces $\vec{F}$ es no conservativa.

8 – Aplicaciones de las integrales de línea

8.1 Distribución de masa a lo largo de una curva

Se considera una curva C como un fino alambre de densidad variable. Se supone que la densidad está definida por un campo escalar μ, siendo $\mu(x,y,z)$ la densidad de masa_por unidad de longitud en el punto (x,y,z) de C. La masa total M del alambre queda representada por la integral de línea de μ respecto a la longitud de arco:

$$M = \int_C \mu(x,y,z)\, ds$$

8.2. Centro de gravedad

Es el punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, cuyas coordenadas están definidas por las ecuaciones:

$$\bar{x}\, M = \int_C x\, \mu(x,y,z)\, ds \qquad \bar{y}\, M = \int_C y\, \mu(x,y,z)\, ds \qquad \bar{z}\, M = \int_C z\, \mu(x,y,z)\, ds$$

8.3. Momento de inercia de un alambre o hilo con respecto a un eje

Si $d(x,y,z)$ representa la distancia desde un punto (x, y, z) de C a un eje L y $\mu(x, y, z)$ es la densidad en (x, y, z), el momento de inercia I_L está definido por la integral de línea :

$$I_L = \int_C d^2(x,y,z)\; \mu(x,y,z)\, ds$$

Los momentos de inercia con respecto a los ejes de coordenadas se representan por I_x, I_y, I_z.

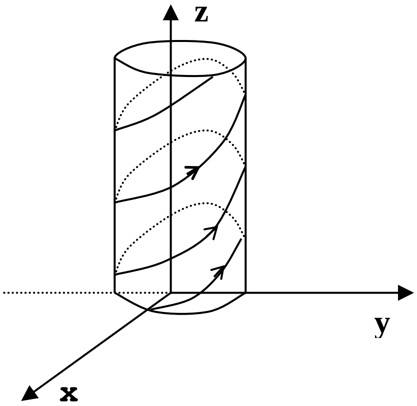
$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\mu(x,y,z)ds \qquad I_y = \int_C (x^2 + z^2)\mu(x,y,z)ds \qquad I_z = \int_C (x^2 + y^2)\mu(x,y,z)ds$$

Ejercicio 6:

Calcular la masa M de un muelle que tiene forma de hélice de ecuación vectorial $\vec{r}(t) = a\cos t\, \vec{i} + a\, sen\, t\, \vec{j} + b\, t\, \vec{k}$ y densidad $\mu = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

Solución:

$$M = \int_C \mu(x,y,z)\, ds = \int_C (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$$



$$\vec{r}(t) = a\cos t\, \vec{i} + a\, sen\, t\, \vec{j} + b\, t\, \vec{k}$$

$$\vec{r}\,'(t) = -a\, sen\, t\, \vec{i} + a\cos t\, \vec{j} + b\, \vec{k}$$

$$ds = \left\| \vec{r}\,'(t) \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

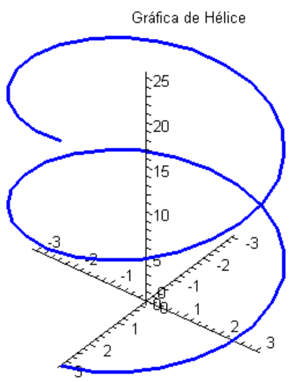
$$M = \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2)\, \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2)\, dt = \sqrt{a^2 + b^2}\ (2\pi)\ [a^2 + \frac{4\pi^2}{3} b^2]$$

!Queda para el lector calcular las coordenadas $\vec{x}$ e $\vec{y}$, y el momento de inercia I_z.

Ejercicio 7:

Calcular la masa M de un muelle que tiene forma de hélice de ecuación vectorial $\vec{r}(t) = 3\cos t\ \vec{i} + 3\,\mathrm{sen}\ t\ \vec{j} + 2\ t\ \vec{k}$ y densidad $\mu = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,\ 0 \le t \le 4\pi$.

Solución



$$M = \int_C \mu(x,y,z)\, ds = \int_0^{4\pi} \left(9\cos t^2 + 9\,sen\,t^2 + 4t^2\right)\sqrt{13}\, dt =$$

$$= 36\sqrt{13}\,\pi + \frac{256}{3}\sqrt{13}\,\pi^3 = 9947{,}594391$$

El desarrollo de este ejercicio, realizado con Maple, se encuentra en el ANEXO de Integrales de Línea.