UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

CÁLCULO II

ALIMENTOS – QUIMICA – INDUSTRIAL

CURSO: SEGUNDO AÑO

INTEGRALES MULTIPLES

Equipo de cátedra:

Mg. Ing. Patricia Cuadros

Dra. Bioing. Lorena Orosco

Ing. Nicolás Sardiña

Año 2021

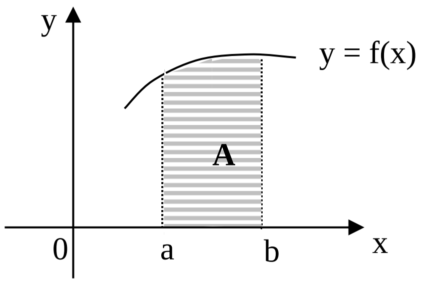
INTEGRALES MULTIPLES

1. Introducción.

Este módulo trata el segundo concepto básico del cálculo, *la **integral***, para campos escalares y vectoriales, de dos o más variables. Se definen tres tipos de integrales: ***Múltiples,*** de ***Línea*** y de ***Superficie***. Estas definiciones se realizan a partir de un concepto geométrico o físico según corresponda.
También se analizan algunas aplicaciones como: masa, centro de gravedad, momento de inercia, flujo y circulación.

En Cálculo I se trabaja en el cálculo de áreas con funciones continuas y definidas en [a ,b], intervalo o subconjunto de $\Re$ (o sea $f : \Re \to \Re$) definiendo el área bajo la curva, gráfica de y = f(x) como

$$A = \lim_{||P||\to 0} [\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x] = \int_a^b f(x)dx$$



Se generaliza el concepto de integral para funciones de dos variables basándose en esta idea. El intervalo unidimensional [a,b] se reemplaza por un conjunto R bidimensional, llamado **región de integración,** contenido en $\Re^2$.

El integrando es una función o campo escalar f: $\Re^2 \to \Re$ **definido y acotado** en $R \subseteq \Re^2$. La integral que resulta se llama integral doble y se representa por:

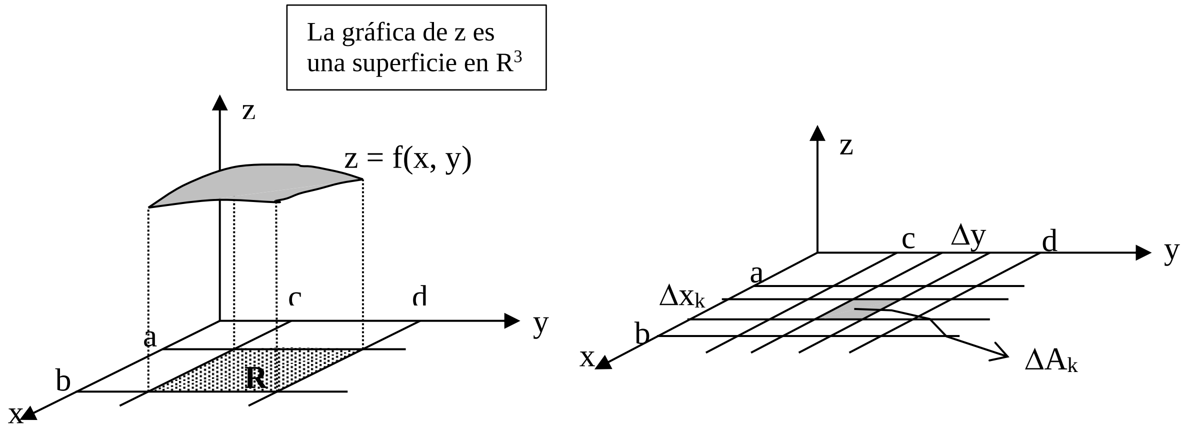
$$\iint_R f(x,y)dA \quad , \qquad \iint_R f(x,y)\ dx\ dy$$

Los símbolos diferenciales dx, dy indican las variables sobre las que se integra y se realiza la transformación de integrales.

2. Integral doble

2.1. Definición de Integral doble

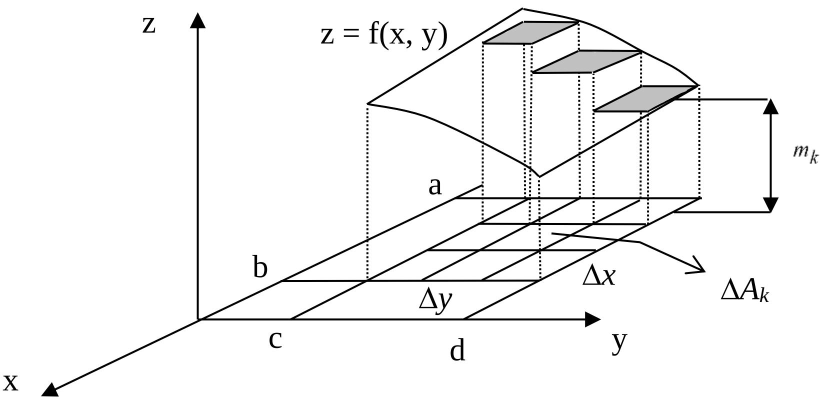
Sea z = f(x, y), una función definida y acotada en el rectángulo R : [a, b] x [c, d] , dividiendo R en n-subrectángulos obtenemos una partición, de R.



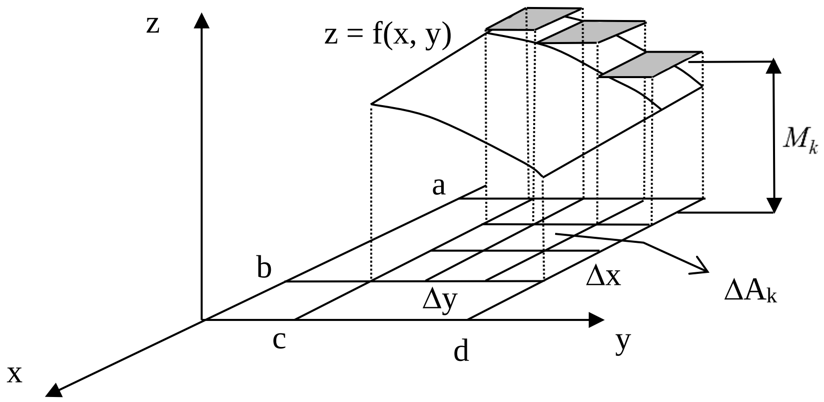
Primero suponemos f(x,y) ≥ 0. La gráfica de f es una superficie con ecuación z = f(x,y). Sea S el sólido que se encuentra encima de R y debajo de la gráfica de f.

El área del k-ésimo rectángulo es $\Delta A_k = \Delta x_k \; \Delta y_k$

Multiplicando ΔA_k por el valor inferior de f(x, y) en el k-ésimo subrectángulo, m_k , formamos la suma inferior $s_p = \sum_{k=0}^{n} m_k \;\; \Delta A_k$



Multiplicando ΔA_k por el valor superior de f(x, y) en el k-ésimo subrectángulo, M_k , formamos la suma superior $S_p = \sum_{k=0}^{n} M_k \;\; \Delta A_k$



Nota: Se verifica $s_p = S_p$ **solamente cuando f (x, y) es constante en cada rectángulo**

La suma inferior s_p nos da un volumen contenido en el cuerpo limitado por la superficie z = f(x,y), el plano xy y el cilindro cuya base es ΔA_k; cuerpo que se llama cilindroide por analogía al trapezoide.
La suma superior S_p nos da el volumen continente de dicho cilindroide.

Se trata de aproximar el volumen del cilindroide por defecto y por exceso, mediante la suma de volúmenes contenidos y continentes correspondientes a cada partición. En cada subrectángulo de la partición se cumple (ver figuras anteriores):

$$m_k \ \Delta A_k \ \le \ V_k \ \le M_k \ \Delta A_k$$

Si hacemos esto para cada ΔA_k que pertenece a la partición tenemos aproximadamente el volumen del cuerpo de base R y altura variable medida sobre z = f(x, y):

$$V \cong \sum_{k=0}^{n} V_k$$

Comparando el volumen V con las sumas inferior y superior se observa que $s_p \ \le \ V \ \le \ S_p$ para cada partición P. Si tenemos una sucesión de particiones $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots \subseteq P_n \subseteq \cdots$ tales que cuando $n \to \infty$ y la norma de la partición tiende a cero, es decir $\|P\| \to 0$ ($\|P\| \underset{\text{def}}{=}$ máxima diagonal de los n-rectángulos), entonces tendremos $s_{P_n} \le V \le S_{P_n} \quad \forall \ n$ y como:

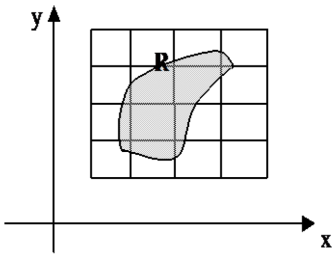
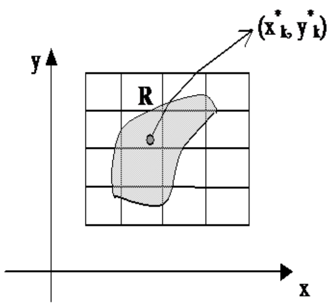
$$\lim_{\|P\|\to 0} s_{P_n} = \lim_{\|P\|\to 0} S_{P_n} \underset{\text{def}}{=} \iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

ya que z = f(x, y) es integrable por ser definida y acotada, tendremos :

$$V = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

Otra forma de definir integral doble.

Los cinco pasos, desarrollados en la siguiente tabla, conducen a la definición de integral doble. Se utiliza la suma de Riemann y el concepto de volumen. Se desarrolla haciendo la comparación con la integral de funciones de una variable, y = f(x)

y = f (x)	**z = f (x,y)**	Interpretación gráfica
1. Considérese que f está definida y acotada en un intervalo cerrado [a,b]	Sea f definida y acotada en una región cerrada R	
2. Forme una partición P del intervalo [a,b] en n subintervalos de longitudes Δx_k	Por medio de una cuadricula (o red de rectas verticales y horizontales paralelas a los ejes coordenados), forme una partición P de R en n subregiones rectangulares R_k de áreas $\Delta A_k = \Delta x_k\, \Delta y_k$ contenidas totalmente en R.	
3. Sea $\lVert P \rVert$ la norma de la partición, o sea la longitud del subintervalo mayor.	Sea $\lVert P \rVert$ la norma de la partición, o sea la longitud de la diagonal mayor de las R_k.de área ΔA_k .	
4. Elíjase un x_k^* intermedio en cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$	Selecciónese un punto (x_k^*, y_k^*) arbitrario intermedio en cada subregión R_k de área ΔA_k.	
5. Evalúe la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\, \Delta x_k$	Evalúe la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\, \Delta A_k$	

De esta manera se tiene la siguiente definición.

Definición: Sea *f* una función de dos variables definida y acotada en una región cerrada R. Entonces la integral doble de f en R está dada por

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{\lVert P \rVert \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\ \Delta A_k$$

Nota:

1 - $\sum_{k=0}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\ \Delta A_k$ se llama suma de Riemann.

2 - Si f es continua en R entonces f es también integrable.

3 - La integral $\iint_R f(x,y)\ dx\ dy$ existe si f está definida y acotada en todos los puntos de R., también existe la integral si los puntos de discontinuidades forman un conjunto finito de puntos.

4 - $\iint_R f(x,y)\ dx\ dy$ calcula un volumen cuyo techo es z = f (x,y).

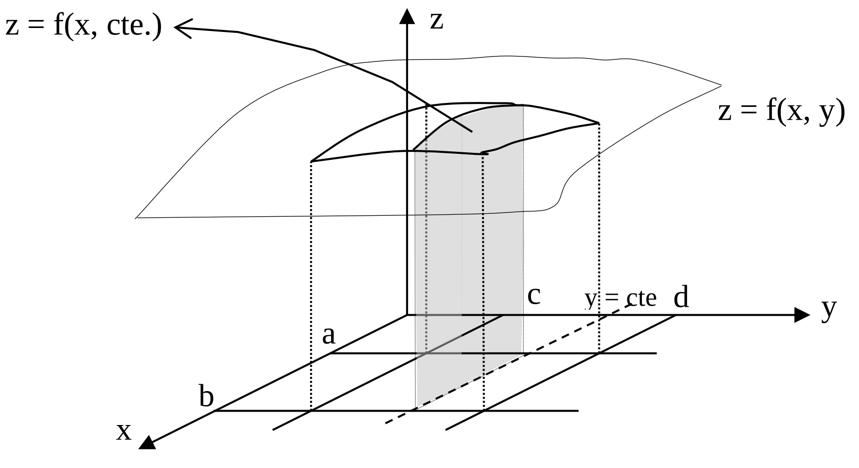
5 – **Si z = f (x,y) = 1,** $\iint_R dx\ dy$ **calcula el área plana de la región R.**

2.2. INTEGRALES ITERADAS

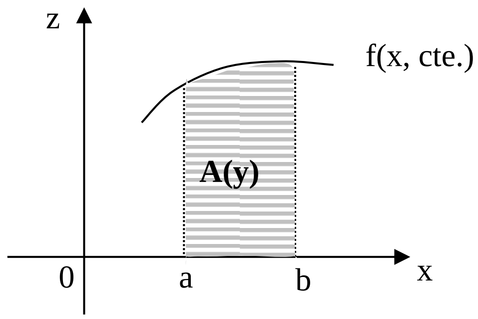
2.2.1. Cálculo de integrales dobles de funciones continuas por medio de integrales reiteradas sobre un rectángulo.

De manera similar al proceso de derivación parcial podemos definir una integración iterada (o parcial). Este concepto es la clave para el método práctico de evaluación de la integral múltiple.

Sea z = f (x,y), talque $f : \Re^2 \rightarrow \Re$ continua en el rectángulo R : [a,b] x [c,d]

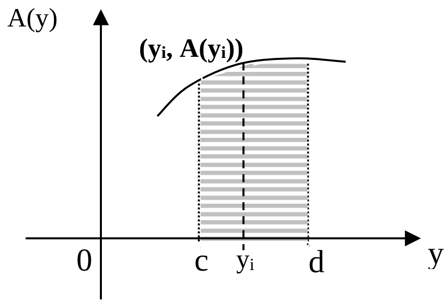


Por lo que sabemos de primer año se puede calcular el área de la región sombreada, en la gráfica anterior



$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\ dx$$

A cada $y_i \in [c,d]$ la integral anterior le asocia un valor A(y_i) los que representamos en el siguiente sistema cartesiano:



El área sombreada en la figura anterior se calcula como $\int_c^d A(y)\ dy$.

Reemplazando $A(y)$ por $\int_a^b f(x,y)\ dx$ podemos calcular el volumen definido por z = f (x,y), sobre el rectángulo R : [a,b] x [c,d]

$$V = \int_c^d A(y)\, dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy$$

De igual manera, pero comenzando el trabajo con x = cte, podremos obtener el mismo volumen:

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx}$$

Nota: Cuando la **región de integración es rectangular** los límites de integración son todos constantes.

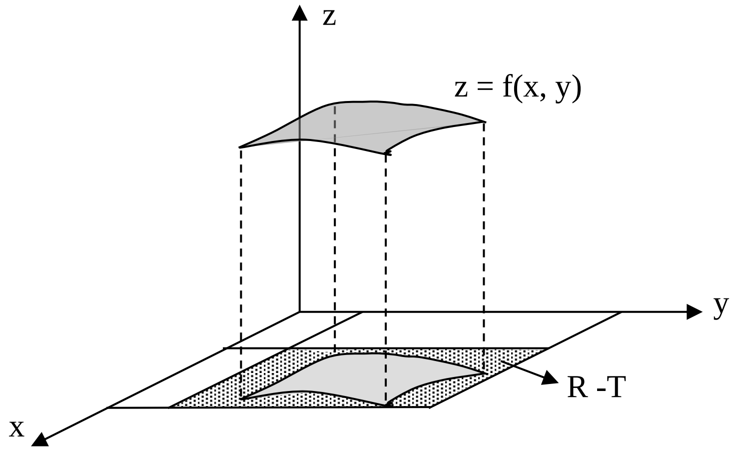
2.2.2. Teorema de Fubini.

Si f(x,y) es continua en la región rectangular R, con a ≤ x ≤ b , c ≤ y ≤ d entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx\ dy$$

2.2.3. Integrales dobles extendidas a regiones más generales.

Hasta aquí la integral doble solo se ha definido para regiones de integración rectangulares. No obstante, no hay dificultad para extender el concepto a regiones más generales. I) Sea T una región acotada e incluyamos T en un rectángulo R.



Sea f una función definida y acotada en T. Definamos una nueva función $\bar{f}$ en R del siguiente modo:

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in T \\ 0 & \text{si } (x,y) \in R - T \end{cases}$$

Es decir, extendemos la definición de f a todo el rectángulo R haciendo que la función valga cero fuera de T.

Como f es integrable en T , por lo tanto:

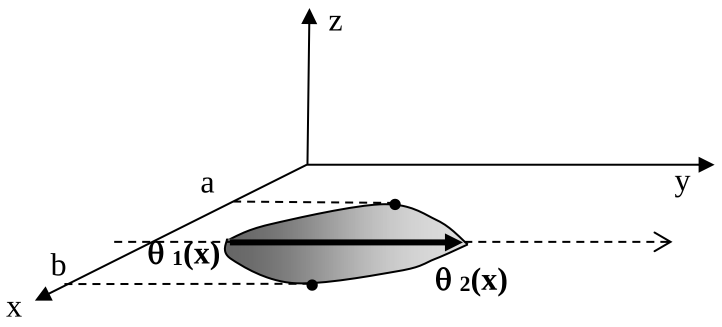
$$\iint_T f(x,y)\ dx\ dy = \iint_R \bar{f}(x,y)\, dx\ dy$$

Para resolver una integral doble sobre un **recinto cualquiera**, se considera la variación de las variables, en el recinto, de dos maneras diferentes:

a) Definamos el recinto R, dominio de integración de la función f(x,y), considerando a la variable x como independiente y a la variable y como dependiente, entonces es

$$R = \{(x,y) /\ a \le x \le b \quad \wedge \quad \theta_1(x) \le y \le \theta_2(x)\}$$

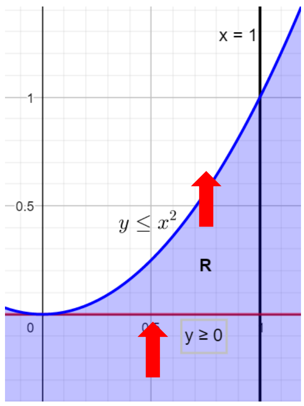
Se interpreta en un gráfico el recinto R y su variación para visualizar lo antes definido. Se tiene en cuenta la definición anterior, luego la integral doble queda planteada de la siguiente manera



Se tiene en cuenta la definición anterior, luego la integral doble queda planteada de la siguiente manera

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\theta_1(x)}^{\theta_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx}$$

Ejemplo 1: Sea R la región definida por: R = $\{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$, donde *f(x,y)* = *2x*. Calcule $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.



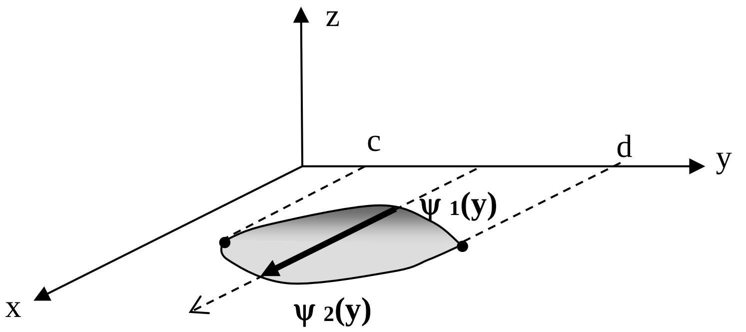
Solución:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_R 2x\,dydx = \int_0^1 \int_0^{x^2} 2x\,dydx = \frac{1}{2}$$

b) Definamos el recinto R, dominio de integración de la función f(x,y), considerando a la variable y como independiente y a la variable x como dependiente, entonces es

$$R = \{(x,y) /\ c \le y \le d \quad \wedge \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}.$$

La interpretación gráfica de R es:



Con esta definición de R la integral doble queda expresada de la siguiente manera:

$$\iint_{R_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)\;dx\;dy$$

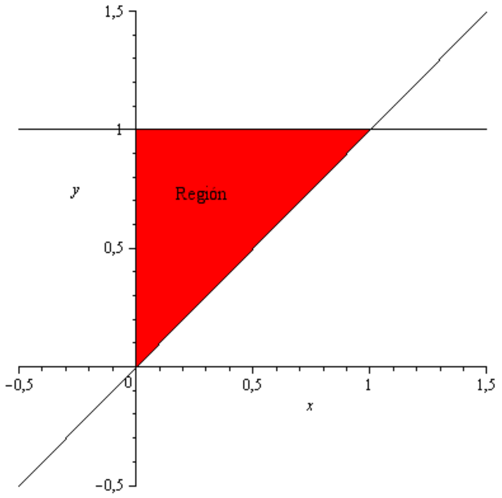
Ejemplo 2: Sea R la región definida por:

R = { (x,y) : 0 ≤ y ≤ 1, 0 ≤ x ≤ y }, donde

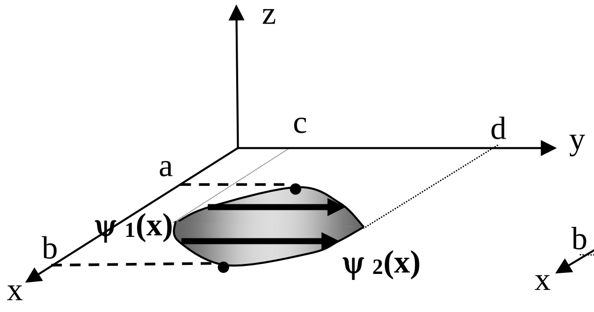
f(x,y) = *2x*. Plantee $\iint_R f(x,y)\;dx\;dy$.

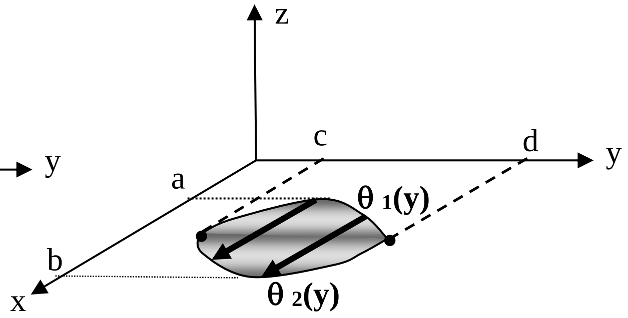
Solución:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_R 2x\,dydx \;=\; \int_0^1 \int_0^y 2x\,dxdy$$



Generalizando: Dada R una región cerrada y acotada que tiene por frontera a una curva γ con la siguiente propiedad, que toda recta corta a γ en a lo sumo dos puntos, como lo indica la figura, y una función f(x.y) definida y continua en R,





Se puede plantear:

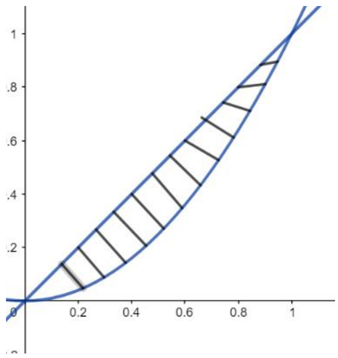
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{\theta_1(y)}^{\theta_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Nota: Observe que el resultado no depende del orden de integración.

Ejemplo 3: Sea R la región limitada por: $y = x$, $y = x^2$ donde $f(x,y) = 2x$. Plantee $\iint_R f(x,y)\;dx\;dy$.

Solución:

$$\iint_R f(x,y)\,dydx = \iint_R 2x\,dydx = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2x\,dydx$$



2.3. Cálculo de áreas planas mediante integrales dobles.

Para calcular el área de la región plana indicada en la Figura [1], utilizando integrales definidas para funciones de una variable, debemos trabajar de la siguiente manera:

$$A = \int_a^b f_2(x)\;dx - \int_a^b f_1(x)\;dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\;dx = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy\,dx$$

La última expresión se obtiene aplicando el concepto vertido por Barrow para el cálculo de integrales definidas.

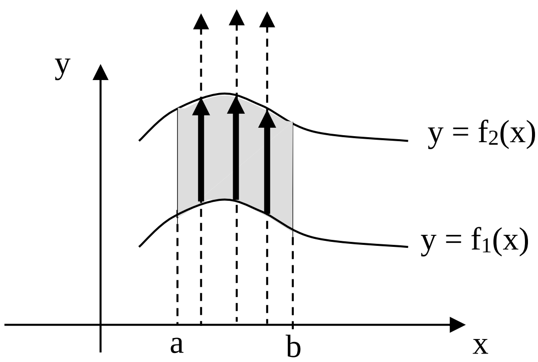


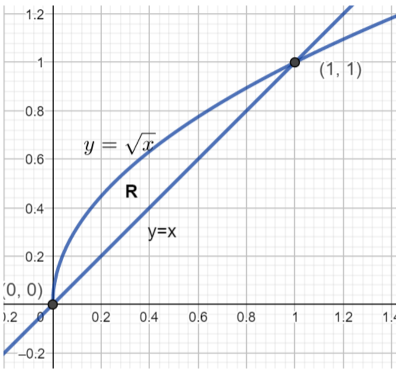
Figura [1]

Podemos observar en el desarrollo anterior que, cuando f(x,y) = 1, la integral doble representa el área del recinto de integración

$$\text{Area} = \iint_R dx\, dy$$

Ejemplo 4: Plantear la integral que permite calcular el área de la región limitada por: y = x, $y = \sqrt{x}$.

Solución: $\iint_R dxdy = \iint_R dydx = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} dydx$

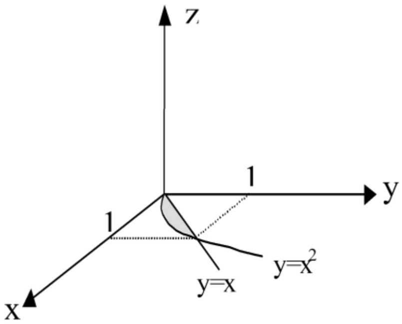


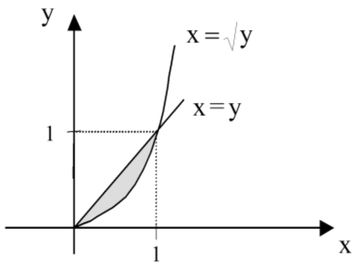
Nota: *por* ***integrales dobles*** *podemos calcular áreas planas y volúmenes****, en este curso*** *utilizaremos estas integrales* ***solamente*** *para* ***calcular áreas planas .***

$$\boxed{V = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy} \quad , \quad \boxed{\text{Area} = \iint_R dx\, dy}$$

Ejemplo 5:

Determinar la región R e invertir el orden de integración: **a)** $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\, dy\, dx$



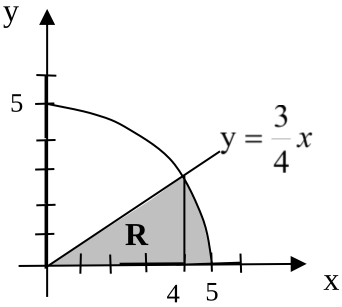


Solución: $y = x$; $y = x^2$

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx\, dy$$

b) Ídem para:

$$\int_0^3 \int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$



Solución: $x = \sqrt{25-y^2}$ $\qquad x = \frac{4}{3}y$

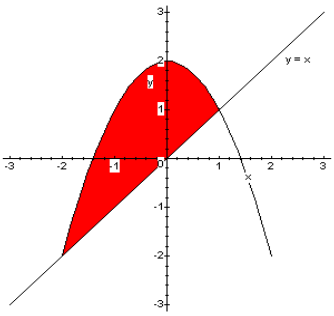
$$\int_0^4 \int_0^{\frac{3}{4}x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_4^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

Ejemplo 6:

Calcular el área del dominio limitado por las curvas $y = 2 - x^2$, $y = x$

Solución:

Primero se determinan los puntos de intersección.



$x = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{(-1 \pm \sqrt{1+8})}{2} \qquad ; \qquad x_1 = 1, \qquad x_2 = -2$$

$P_1\,(1,1)$ y $P_2\,(-2,-2)$

$$A = \int_{-2}^{1} \int_{x}^{2-x^2} dy\,dx$$

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\,dx = 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{1} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left[-4 + \left(\frac{8}{3}\right) - 2\right] = \frac{27}{6}$$

22.5. Cambio de coordenadas en integrales.

En teoría de integración unidimensional el método de sustitución nos permite calcular integrales complicadas transformándolas en otras más sencillas o en tipos de integrales que pueden calcularse más fácilmente, quedando así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f\,[g(t)]\,g'(t)\,dt \qquad \text{con } x = g(t) \qquad (1)$$

donde $a = g(t_1)$ y $b = g(t_2)$. Suponiendo que g tiene derivadas continuas en $[t_1, t_2]$ y que f es continua en el conjunto de valores que forma g(t) al variar t en $[t_1, t_2]$.

2.5.1. Cambio de coordenadas en integrales dobles. Coordenadas curvilíneas

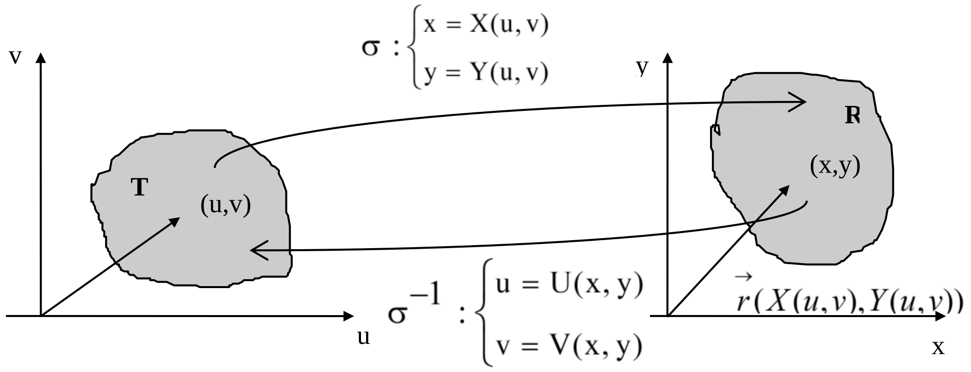
En dos dimensiones existe análogo problema para las integrales dobles. Se transforma una integral doble de la forma

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

extendida a una región R del plano xy, en otra integral doble $\iint_T F(u, v)\, du\, dv$ extendida a una nueva región T del plano uv.

Se va a estudiar a continuación la relación entre las áreas definidas por las regiones **R** y **T**, también de los integrandos **f(x,y)** y **F(u,v)**. El método de sustitución en integrales dobles es más laborioso que en las simples debido a que existen dos sustituciones formales a efectuar, una respecto a x; y otra respecto a y. Esto significa que en lugar de una función g que aparece en (1), tenemos ahora dos funciones X e Y que relacionan x,y con u,v del modo siguiente :

Sea σ la aplicación $\sigma : \begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v) \end{cases}$ (2)



}

Geométricamente, puede considerarse que $\begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v) \end{cases}$ definen una "aplicación" que hace corresponder a un punto (u,v) del plano uv, el punto imagen (x,y) del plano xy. Es decir que un conjunto T de puntos del plano uv es aplicado a otro conjunto R del plano xy, como se representa en la figura.

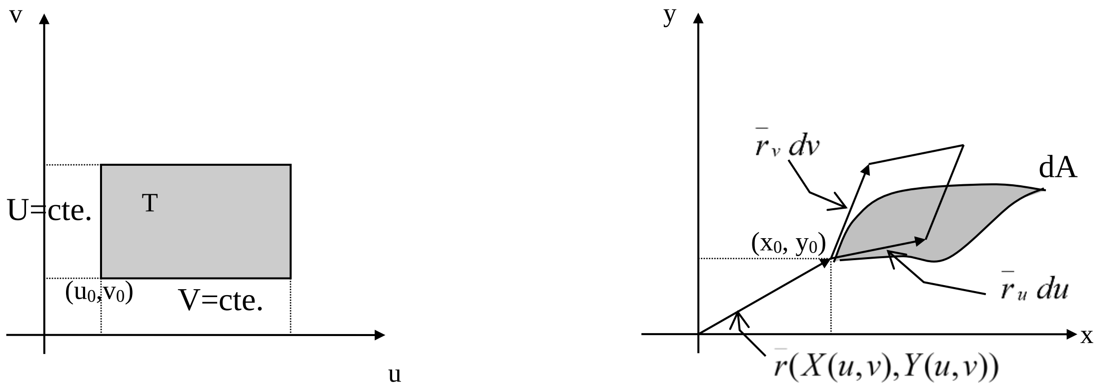
La aplicación también se expresa mediante una función vectorial. En el plano xy se traza el radio vector que une el origen con un punto genérico (x,y) de R.

$\bar{r}(u, v) = X(u, v)\,\bar{i} + Y(u, v)\,\bar{j}$ ecuación vectorial de la aplicación.

Como (u,v) son puntos de T, el vértice de $\bar{r}(u,v) = X(u,v)\,\bar{i} + Y(u,v)\,\bar{j}$ describe puntos de R. Algunas veces puede expresarse “u” y “v” en función de “x” e “y” quedando:

$$\sigma^{-1}: \begin{cases} u = U(x,y) \\ v = V(x,y) \end{cases}$$

Estas ecuaciones definen una aplicación del plano xy en el plano *uv*, llamada aplicación inversa de la definida en (2), ya que transforma los puntos de R en los de T.
Esta aplicación es la que se usa en la practica por eso se pide que X(u,v) ; Y(u,v) tengan inversa, para lo cual σ debe ser uno a uno o biunívoca..
Las aplicaciones uno a uno son de especial importancia. Estas transforman puntos distintos de T en puntos distintos de R; tales aplicaciones establecen una correspondencia biunívoca entre los puntos de T y los correspondientes de R y permite (por lo menos teóricamente) regresar de R a T por la aplicación inversa (que naturalmente es uno a uno).



Si consideramos un segmento horizontal en el plano uv, sobre dicho segmento v es constante. La función vectorial $\bar{r}$ aplica este segmento sobre una curva (llamada curva u) en el plano xy.

Si $\quad \vec{r}\,(u,v) = X(u,v)\,\vec{i} + Y(u,v)\,\vec{j} \quad$ luego $\quad d\vec{r} = \vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv$

Si $\quad v = v_0 = cte \quad$ entonces $\quad d_u\, \vec{r} = \vec{r}_u\, du \quad$ pues $\quad \vec{r}_v\, dv = 0$

Si $\quad u = u_0 = cte \quad$ entonces $\quad d_v\, \vec{r} = \vec{r}_v\, dv \quad$ pues $\quad \vec{r}_u\, du = 0$

Se observa que $d_u\, \vec{r} = \vec{r}_u\, du$ es paralelo a $\vec{r}_u$ y que $d_v\, \vec{r} = \vec{r}_v\, dv$ es paralelo a $\vec{r}_v$

La región rectangular del plano uv se transforma en una porción del plano xy que es casi un paralelogramo cuyos lados son los vectores $\bar{r}_u\, du$ y $\bar{r}_v\, dv$ como se observa en la figura anterior. El área de dicho paralelogramo es el módulo del producto vectorial de ambos vectores.

Luego el $\; dA = \left\| \vec{r}_u\, du \times \vec{r}_v\, dv \right\| = \left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\| du\, dv$

Donde el módulo del producto vectorial es:

$$\left\|\vec{r}_u \ x \ \vec{r}_v\right\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{matrix} \right\| = \left| \frac{\partial \ (x,y)}{\partial \ (u,v)} \right| = |J(u,v)|$$

Pues por definición el Jacobiano de (u,v) es $|J(u,v)| = \left|\dfrac{\partial \ (x,y)}{\partial \ (u,v)}\right| = \left\|\begin{matrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{matrix}\right\|$

Recordar y relacionar con matriz jacobiana vista en Unidad I, parágrafo 10.7 pag.41.

Por lo que el área:

$$dA = \left\|\begin{matrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{matrix}\right\| du \ dv = \left|\frac{\partial \ (x,y)}{\partial \ (u,v)}\right| du \, dv$$

Es decir que: $\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \iint_T f\,[X(u,v), Y(u,v)] \cdot |J(u,v)|\, du\, dv$

- Si J(u,v) = 1 para todos los puntos de T, el "paralelogramo" tiene **la misma área** que el rectángulo y la aplicación conserva las áreas. Si no es así, para obtener el área del paralelogramo se debe **multiplicar el área del rectángulo por J(u,v).** .
  Se ve que el jacobiano es un factor de proporcionalidad de las áreas de las regiones.
- Si J(u,v) = 0 en un punto (u,v), los vectores $\vec{r}_u$ du y $\vec{r}_v$ dv son paralelos (ya que su producto vectorial es el vector nulo) y el paralelogramo degenera.
  Tales puntos se llaman puntos singulares de la aplicación. Ya sabemos que la forma de transformación es válida también si existe un número finito de puntos singulares o más general cuando tales puntos forman un conjunto de medida nula.

De lo estudiado anteriormente tenemos

Teorema :

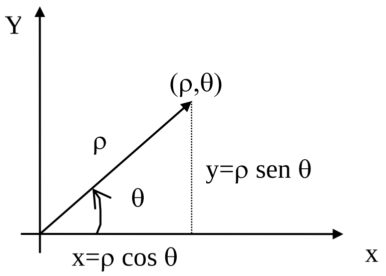
Sea z = f(x,y) integrable en una región R. Sea $\vec{\sigma}$ una transformación biunívoca $\vec{\sigma}: \Re^2 \ \rightarrow \ \Re^2$ dada por x = X (u,v) , y = Y (u,v) tal que J(u,v) $\neq$ 0 ,
para todo (u,v) $\in \vec{\sigma}^{\,-1}$ (R) = T. Entonces se verifica

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \iint_T f\,[X(u,v), Y(u,v)] \ |J(u,v)| \ du \ dv$$

Observación: la formula anterior vale también si J(u,v) = 0 sobre un número finito de puntos singulares.

2.5.2. Cambio de coordenadas en integrales dobles. Coordenadas polares

Consideremos: $\begin{cases} x = \rho\ \cos\theta \\ y = \rho\ \operatorname{sen}\theta \end{cases}$



Es decir que: $\begin{cases} x(\rho,\theta) = \rho\ \cos\theta \\ y(\rho,\theta) = \rho\ \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

con $\rho > 0$ y $\theta_0 \le \theta \le \theta_0 + 2\pi$

para que la aplicación sea uno a uno.

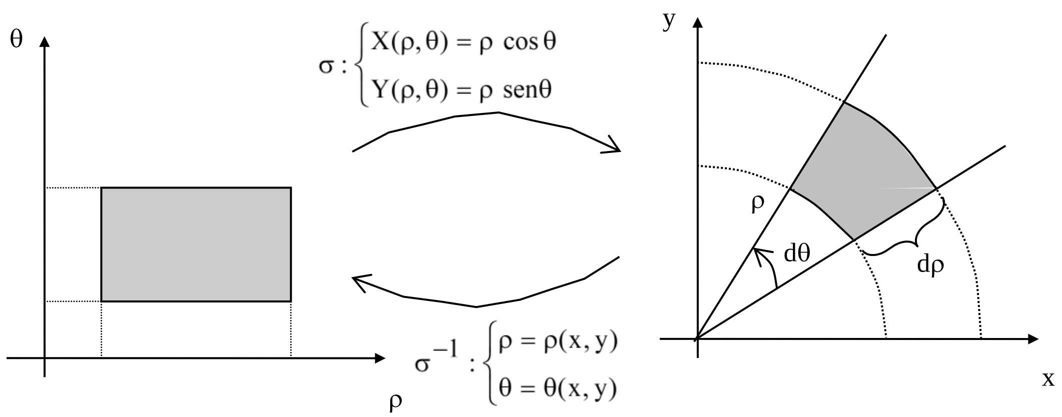
$$J(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\ (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho \Rightarrow |J(\rho,\theta)| = |\rho| = \rho$$

Quedando $dA = \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$

La fórmula de transformación es:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T f\ (\rho\ \cos\theta, \rho\ \operatorname{sen}\theta)\ \rho\ d\rho\ d\theta$$

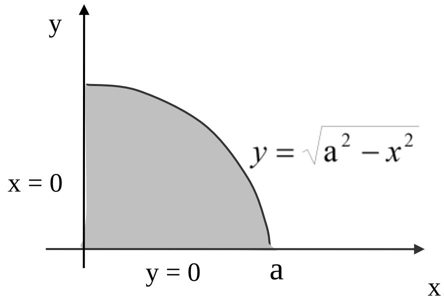
Las curvas ρ = cte. son rectas por el origen y las curvas θ = cte. son círculos concéntricos en el origen en xy. La imagen del rectángulo en el plano ρθ es un "seudo paralelogramo" en el plano xy limitado por dos radios y dos arcos de circulo.



Las coordenadas polares son particularmente importantes cuando la región de integración tiene fronteras a lo largo de las cuales ρ o θ son constante. En el caso de **contornos circulares** o **elípticos** en el plano xy, se puede transformar en **rectas paralelas** a los ejes coordenados en el plano ρ,θ.

Ejemplo 7: Calcular el área de un cuarto de círculo de radio a.

Solución: Se realiza el cálculo utilizando integrales dobles y coordenadas polares.



$$A = \iint_R dx\, dy$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad J(\rho,\theta) = \rho$$

En el plano xy se toma un cuarto de círculo, en el primer cuadrante y se ve en que se transforma en el plano (ρ,θ), transformamos cada una de las fronteras:

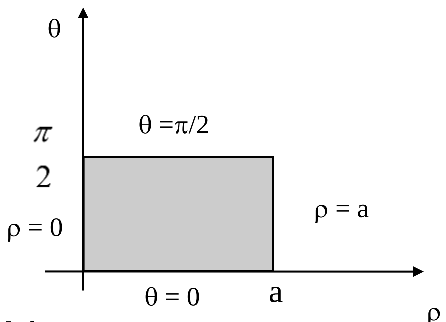
Si $x = 0 \Rightarrow 0 = \rho \cos\theta \rightarrow \theta = \pi/2$

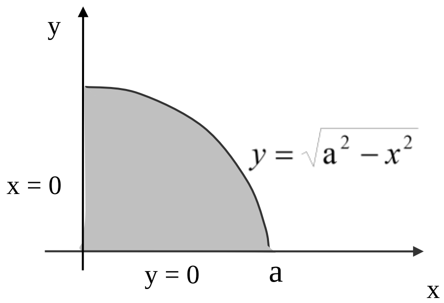
Si $y = 0 \Rightarrow 0 = \rho \operatorname{sen}\theta \rightarrow \theta = 0$

Si $x^2 + y^2 = a^2 \rightarrow \rho^2 = a^2 \rightarrow \rho = \pm a$, ρ sólo toma valores positivos $\Rightarrow \rho = a$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 0 \Rightarrow 0 = \rho \cos\theta \\ \text{Si } y = 0 \Rightarrow 0 = \rho \operatorname{sen}\theta \end{array}\right\} \rightarrow \rho = 0$$

Luego $0 \le \rho \le a$ El cuarto de circulo se transforma en el rectángulo $[0,a] \times [0,\pi/2]$





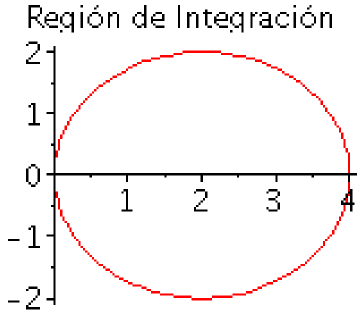
Luego el área es:

$$A = \iint_T \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{4} a^2$$

Ejemplo 8:

Calcular el área del círculo de ecuación $x^2 + y^2 \le 4x$ en coordenadas polares.

Solución: utilizando MAPLE :



$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{4\cos\theta} \rho \, d\rho \, d\theta = 4\pi$$

Ver desarrollo de la solución en Anexo de Integrales Múltiples.

2.5.3. Cambio de coordenadas en integrales dobles. Coordenadas polares generalizadas

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \rho \cdot \cos\theta & 0 \le \rho \le 1 \\ \dfrac{y}{b} = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \qquad J(\rho,\theta) = a \cdot b \cdot \rho$$

! Queda para el lector la demostración del Jacobiano para estas coordenadas y el planteo del dA.

2.6. Aplicaciones de integrales múltiples

2.6.1. Valor medio de una función.

Sea f(x,y) una función continua en las variables x e y, el valor medio de f(x,y) en una región plana R está dado por :

$$\boldsymbol{Valor\ Medio} = \frac{\iint_R f(x,y)\,dA}{\iint_R dA}$$

2.6.1. Masa total de una lámina.

En estas aplicaciones se trabaja con una lámina en $\Re^2$

Se define utilizando integrales dobles a la masa total de una lámina con densidad σ (x,y), como

$$m(R) = \iint_R \sigma(x, y)\, dx\, dy$$

el cociente $\dfrac{\text{masa}}{\text{area}} = \dfrac{\iint_R \sigma(x, y)\, dx\, dy}{\iint_R dx\, dy}$ se llama densidad media de la lámina.

Si R no es una lámina, sino una figura geométrica de dos dimensiones, el anterior cociente se llama **promedio o valor medio de la función σ sobre la región R**.

2.6.2. Centro de gravedad de una lámina.

Se define como centro de gravedad $(\bar{x}, \bar{y})$ de una lámina a

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\sigma(x, y)\, dx\, dy}{m(R)} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y\sigma(x, y)\, dx\, dy}{m(R)}$$

Cuando la densidad es constante σ (x,y) = c , entonces :

$$\bar{x} = c\,\frac{\iint_R x\, dx\, dy}{\iint_R dx\, dy} \quad ; \quad \bar{y} = c\,\frac{\iint_R y\, dx\, dy}{\iint_R dx\, dy}$$

donde $\iint_R dx\, dy$ es el área de R.

En este caso $(\bar{x}, \bar{y})$ se denomina centroide de la lámina (o de la región R).

2.6.3. Momento de inercia de una lámina.

L es una recta en el plano de la lámina y d(x,y) la distancia desde el punto (x,y) de R a la recta L.

$$I_L = \iint_R d^2(x, y)\sigma(x, y)\, dx\, dy$$

Se llama **momento de inercia de la lámina respecto a L.**

Nota: Si σ (x,y) = 1, I_L se denomina momento de inercia o segundo momento de la región R respecto de L.

Los momentos de inercia respecto a los ejes x e y se designan por Ix e Iy

$$I_x = \iint_R y^2 \sigma(x,y)\,dx\,dy \quad , \quad I_y = \iint_R x^2 \sigma(x,y)\,dx\,dy$$

La suma de estos dos se llama **momento polar** de inercia $\mathbf{I_0}$ respecto del origen: $\mathbf{I_0 = I_x + I_y}$

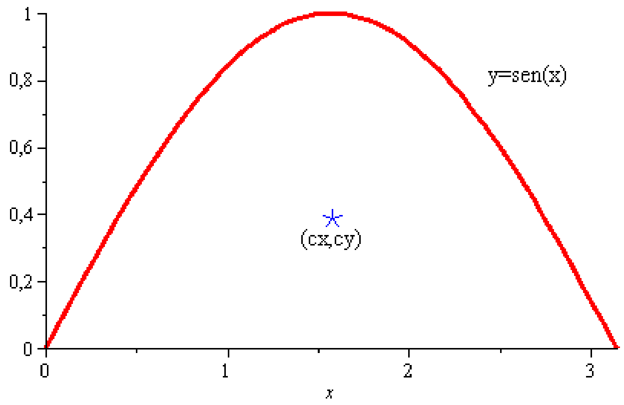
Ejemplo 9: Calcular el centroide de la región plana limitada por un arco de sinusoide, con $0 \le \theta \le \pi$.

Solución: Como $\sigma(x,y)$ no es dato se considera constante.

Por simetría

$$\bar{x} = \frac{\pi}{2} = 1{,}57$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\,dx\,dy}{\iint_R dx\,dy}$$



$$\int_0^{\pi}\int_0^{\text{senx}} dx\,dy = \int_0^{\pi} \text{senx}\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\text{senx}} y\,dx\,dy = \int_0^{\pi} \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\text{sen}\,x} dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{(\text{sen}2x)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

Luego:

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\,dx\,dy}{\iint_R dx\,dy} = \frac{\pi}{8} = 0{,}39$$

3. INTEGRALES TRIPLES

3.1. DEFINICIÓN DE INTEGRALES TRIPLES

Siguiendo los cinco pasos utilizados para definir integrales dobles, se define la integral definida tridimensional o integral triple. La que notamos como

$$\iiint_R F(x,y,z)\ dV$$

1. Considere que F(x ,y ,z) está definida y acotada en una región R cerrada en el espacio.

2. Por medio de una red tridimensional de planos verticales y horizontales paralelos a los planos coordenados, forme una partición P de R en subregiones (cajas) R_k de volúmenes V_k contenidas totalmente en R, donde $\|P\|$ es la norma de la partición, o sea la longitud de la diagonal mayor de los R_k.

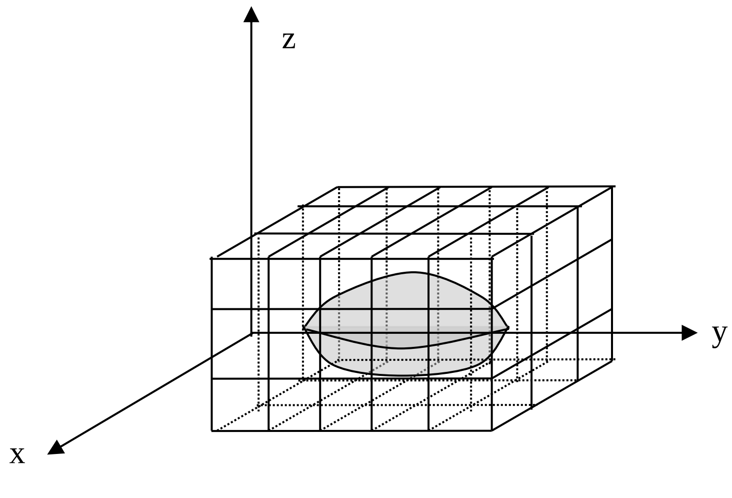
3. Elija un punto intermedio arbitrario (x_k^*, y_k^*, z_k^*) en cada subregión R_k.

4. Forme la suma de Riemann:

$$\sum_{k=0}^{n} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\ \Delta V_k$$

5. Tome el límite de la sumatoria anterior cuando la norma de la partición tiende a cero para obtener la definición buscada.

$$\iiint_R F(x,y,z)dV = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=0} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$



Definición: Sea f una función de tres variables definida y acotada en una región cerrada R del espacio. Entonces la integral triple de F en R esta dada por

$$\iiint_R F(x,y,z)\ dV = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=0}^{n} F(x_k{*}, y_k{*}, z_k{*})\ \Delta V_k$$

siempre y cuando el límite exista.

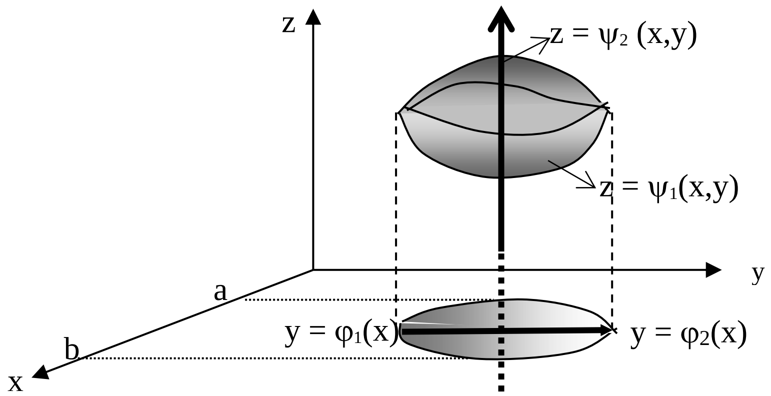
Se trabaja con funciones continuas sobre una región $R \subseteq \Re^3$ simplemente conexa del tipo:

$$R = \{(x,y,z) : a \le x \le b\,;\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\,;\ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$$

Supóngase que este dominio especial tridimensional R, limitado por una superficie cerrada S tiene las siguientes propiedades:

1) Que toda paralela al eje z, trazada por un punto interior del dominio R (es decir por un punto que no pertenece a la frontera S), corta a la superficie S en dos puntos.

2) Todo el dominio R se proyecta sobre el plano xy en forma de un dominio regular (de dos dimensiones) D.



El volumen V es la diferencia del volumen que limita $z = \psi_2(x,y)$ menos el volumen que limita $z = \psi_1(x,y)$. Luego el volumen total es igual a:

$$V = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \psi_2(x,y)\,dy\,dx - \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \psi_1(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} [\psi_2(x,y) - \psi_1(x,y)]\,dy\,dx$$

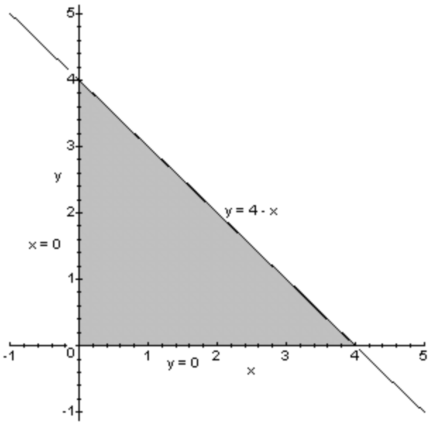
$$V = \int_{a}^{b} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dz\, dy\, dx$$

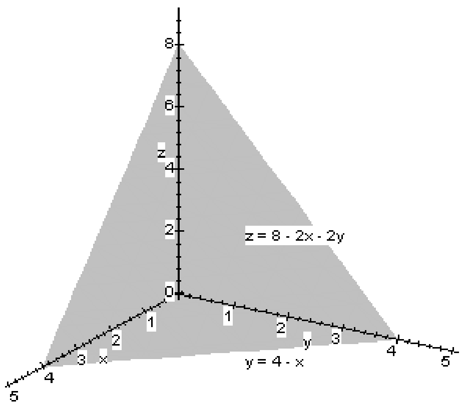
Las integrales triples no tienen interpretación geométrica cuando el integrando no es constante, es decir del tipo:

$$\int_{a}^{b} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Ejemplo 10: Calcular el volumen comprendido entre los tres planos coordenados y $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1$

Solución: Despejando z, z = 8 - 2x - 2y





$$V = \int_{0}^{4} \int_{0}^{4-x} \int_{0}^{8-2x-2y} dz\, dy\, dx = \int_{0}^{4} \int_{0}^{4-x} (8 - 2x - 2y)\, dy\, dx = \int_{0}^{4} \left. 8y - 2xy - y^2 \right|_{0}^{4-x} dx =$$

$$\int_{0}^{4} [8(4 - x) - 2x(4 - x) - (4 - x)^2]\, dx$$

$$V = \int_{0}^{4} (16 - 8x + x^2) dx = 16x - 4x^2 + \left. \frac{x^3}{3} \right|_{0}^{4} = \frac{64}{3}$$

3.2. Cambio de coordenadas en integrales triples.

3.2.1. Cambio de coordenadas en integrales triples. Coordenadas curvilíneas

Teorema:

Sea f = f(x ,y ,z) integrable en $R \subseteq \Re^3$, σ una aplicación uno a uno tal que, $\sigma : \Re^3 \to \Re^3$ y

$$\sigma = \begin{cases} x = X(u,v,w) \\ y = Y(u,v,w) \\ z = Z(u,v,w) \end{cases}$$

tal que $J(u,v,w) \neq 0$ para todo $(u,v,w) \in \sigma^{-1}(R) = R'$ entonces se verifica:

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{R'} f\ [X(u,v,w), Y(u,v,w), Z(u,v,w)]\ |J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

Observación:

1 - La fórmula anterior vale aún si, sobre un conjunto de $\Re^3$ de medida nula, J = 0

2 – Nótese que la expresión del diferencial volumen, dV, en el nuevo sistema de coordenadas es

$$dV = |J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw = \left|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \cdot \vec{r}_w\right| du\,dv\,dw \qquad (1)$$

Con du > 0, dv > 0, dw > 0 escalares positivos.

Se recuerda que el vector posición de la superficie es $\vec{r}(u,v,w) = x(u,v,w)\vec{i} + y(u,v,w)\vec{j} + z(u,v,w)\vec{k}$, por lo que

$$\vec{r}_u = x_u\ \vec{i} + y_u\ \vec{j} + z_u\ \vec{k}$$

$$\vec{r}_v = x_v\ \vec{i} + y_v\ \vec{j} + z_v\ \vec{k}$$

$$\vec{r}_w = x_w\ \vec{i} + y_w\ \vec{j} + z_w\ \vec{k}$$

Reemplazando en (1) resulta:

$$dV = \left| \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \cdot \vec{r}_w \right| \; du \; dv \; dw = \left\| \begin{matrix} X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \\ X_w & Y_w & Z_w \end{matrix} \right\| du\,dv\,dw$$

Este determinante es el **jacobiano** o **factor de proporcionalidad de volúmenes**,

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \\ X_w & Y_w & Z_w \end{vmatrix}$$

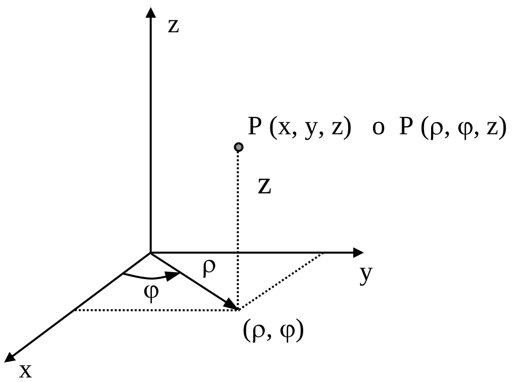
Existen dos sistemas de coordenadas curvilíneas particularmente importantes, las coordenadas cilíndricas y las esféricas.

3.2.2. Cambio de coordenadas en integrales triples. Coordenadas cilíndricas

Se ubica un punto en el espacio y sus correspondientes coordenadas ρ, φ, z.

La transformación $\sigma : \begin{cases} x = \rho \; \cos\varphi \\ y = \rho \; \operatorname{sen}\varphi \\ z = z \end{cases}$

con $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\rho > 0$,



recibe el nombre de sistema de coordenadas cilíndricas, se calcula su Jacobiano y se ve donde es válida dicha transformación.

$$J(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial \; (x,y,z)}{\partial \; (\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_z & y_z & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\rho\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \;\; ;$$

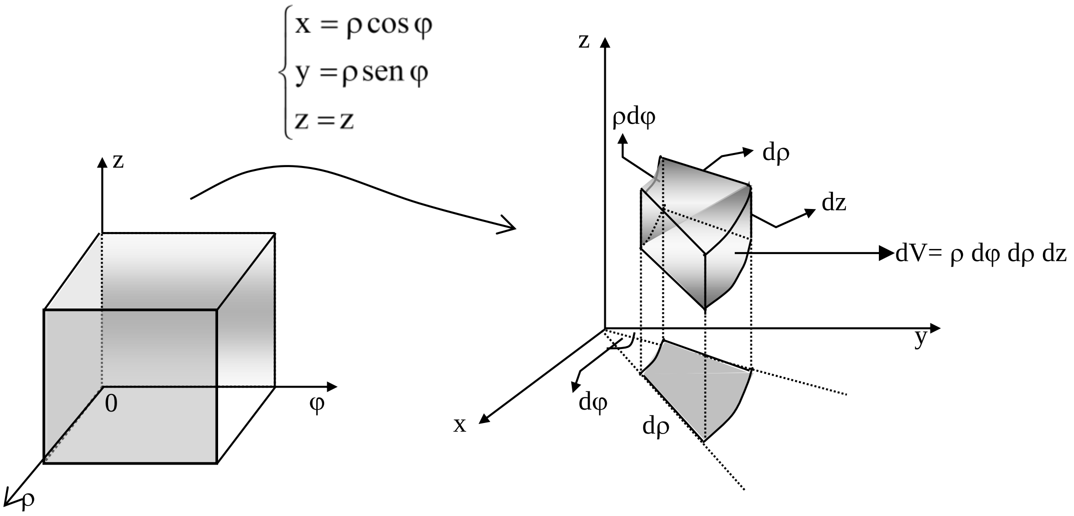
Se obtiene la expresión del jacobiano y del diferencial de volumen correspondiente

$$J(\rho,\varphi,z) = \rho \qquad \text{y} \qquad dV = \rho \; d\rho \; d\varphi \; dz$$

El jacobiano es distinto de cero ($J(\rho,\varphi,z) \neq 0$) si y solo si $\rho \neq 0$, luego para todo punto distinto del origen existe σ^{-1} y por lo tanto para estos puntos la terna (ρ,φ,z) es un sistema de coordenadas.
Al aplicar la transformación tenemos:

$$\iiint_R f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{R'} f(\rho\cos\varphi \ ,\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \ ,z)\,\rho\ d\rho\ d\varphi\ dz$$

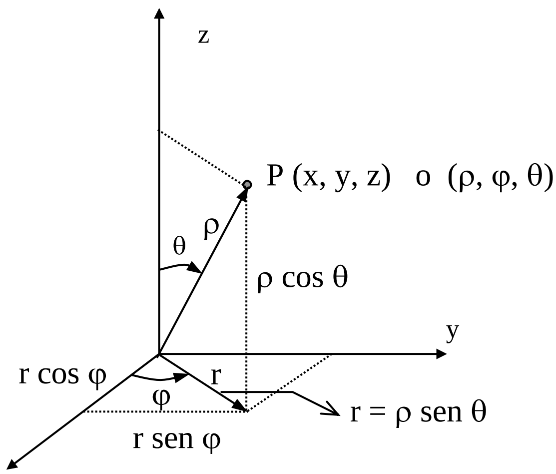
Gráficamente:



3.2.3. Cambio de coordenadas en integrales triples. Coordenadas esféricas

La transformación $\sigma : \begin{cases} x = r\ \cos\varphi \\ y = r\ \mathrm{sen}\,\varphi \\ z = \rho\ \cos\theta \end{cases}$

con $r = \rho\ \mathrm{sen}\ \theta$ (ver gráfica)

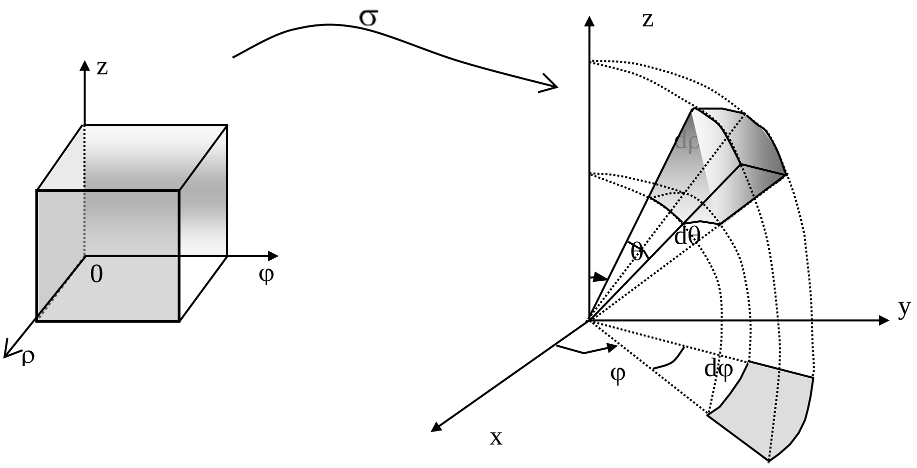


da lugar a la transformación

$$\begin{cases} x = \rho\ \mathrm{sen}\theta\ \cos\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = \rho\ \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{sen}\varphi & 0 \le \theta \le \pi \\ z = \rho\ \cos\theta & \rho \ge 0 \end{cases}$$

llamada sistema de coordenadas esféricas.

En la siguiente figura se visualiza la transformación de un diferencial de volumen cuando se le aplica coordenadas esféricas.



Se determina la expresión del jacobiano para las coordenadas esféricas

$$J(\rho,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta\ \cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\theta \\ -\rho\operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\varphi & \rho\ \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & -\rho\ \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix}$$

$$=-\rho^2 sen^3\theta\ \cos^2\varphi-\rho^2 sen\theta\ sen^2\varphi\ \cos^2\theta-[\rho^2\cos^2\theta\ sen\theta\ \cos^2\varphi+\rho^2 sen^3\theta\ sen^2\varphi]$$
$$=-\rho^2[\operatorname{sen}^3\theta\ (\operatorname{sen}^2\varphi+\ \cos^2\varphi)+\cos^2\theta\ (\operatorname{sen}\theta\ \cos^2\varphi+\operatorname{sen}\theta\ \ \operatorname{sen}^2\varphi)]$$

$$=-\rho^2[\operatorname{sen}^3\theta\ +\cos^2\theta\ \ \operatorname{sen}\theta\ (\cos^2\varphi+\ \operatorname{sen}^2\varphi)]$$

$=-\rho^2[sen\theta\ (\cos^2\theta+\ sen^2\theta)]=-\rho^2 sen\theta$, obteniendo finalmente

$$J(\rho,\varphi,\theta)=\rho^2 sen\theta$$

Si $J(\rho,\varphi,\theta)\neq 0$, entonces ρ^2 sen $\theta\neq 0$, por lo que sen $\theta\neq 0$ y $\theta\neq 0$.
Pero si $\theta = 0$ implica que son los puntos sobre el eje z (+) que es un conjunto de medida nula en $\Re^3$ por lo que la formula de transformación es:

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{R'} f\ \ [\rho\ \operatorname{sen}\theta\ \cos\varphi,\rho\ \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\varphi,\rho\ \cos\theta]\rho^2\operatorname{sen}\theta\ d\rho\ d\theta\ d\varphi$$

Ejemplo 11:

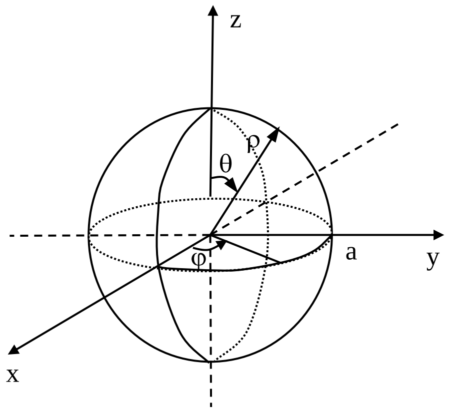
a) Calcular el volumen de una esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ utilizando **coordenadas esféricas**.

Solución:

$$V = \iiint_R dx\ dy\ dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\theta\ \ d\theta\ \ d\rho\ \ d\varphi$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \left. -\rho^{\,2}\cos\theta \right|_0^{\pi} d\rho\ \ d\varphi\ = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} 2\cdot\rho^{\,2}\ d\rho\ \ d\varphi$$

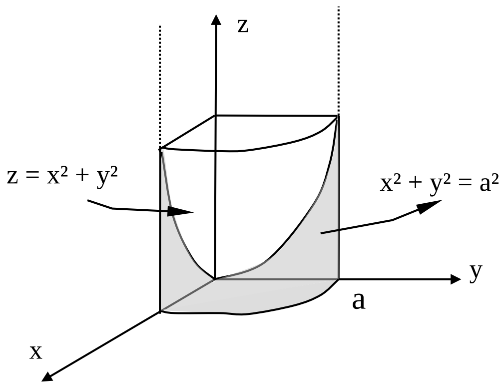
$$V = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \left. \rho^3 \right|_0^{a} d\varphi\ = \frac{2}{3} a^3 \int_0^{2\pi} d\varphi\ = \frac{4}{3}\pi\ \ a^3$$



b) Hallar el volumen de la región encima del plano xy limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$

Solución: se trabaja con **coordenadas cilíndricas,** así la ecuación del paraboloide se transforma en $z = \rho^2$ y la ecuación del cilindro en $\rho^2 = a^2$.

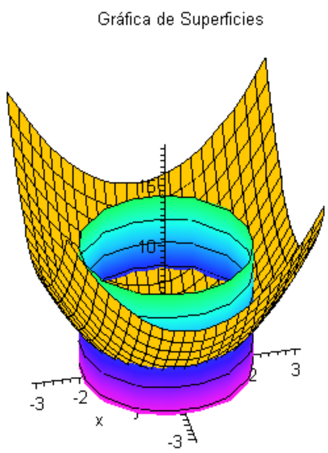
$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\rho^2} \rho\ \ dz\ \ d\rho\ \ d\varphi$$



$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \left. \rho\ z \right|_0^{\rho^2} d\rho\ \ d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \rho^3\ \ d\rho\ \ \ d\varphi = 2\pi\ \frac{a^4}{4}$$

$$V = \frac{\pi}{2}\ a^4$$

La gráfica utilizando Maple es:



3.3. Aplicaciones de las integrales triples

3.3.1. Masa total de un sólido.

Las integrales triples pueden emplearse para calcular volúmenes, masas, centros de gravedad, momentos de inercia y otros conceptos físicos asociados a sólidos. Si R es un sólido su **volumen V** está definido por la integral triple:

$$V = \iiint_R dx\ dy\ dz$$

Si al sólido se le asigna una densidad τ (x,y,z) en cada uno de sus puntos (x,y,z), su **masa M** es:

$$M = \iiint_R \tau\ (x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

3.3.2. Centro de gravedad de un sólido.

Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del **centro de gravedad** de un sólido R se determinan por definición de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_R x\ \tau\ (x, y, z)\, dx\, dy\, dz \qquad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_R y\ \tau\ (x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_R z\ \tau\ (x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

3.3.3. Momento de inercia de un sólido.

El **momento de inercia respecto al plano xy, I_{xy}**, se determina por:

$$I_{xy} = \iiint_R z^2\ \tau\ (x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

existiendo fórmulas similares para I_{yz}, I_{zx}.

El **momento de inercia respecto de una recta L, I_L**, se define como:

$$I_L = \iiint_R d^2(x, y, z) \cdot \tau\ (x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

donde d(x,y,z) representa la distancia de un punto genérico de R a la recta L.

Ejemplo 12: Hallar el momento de inercia con respecto al eje z, del **Ejemplo 16 b),** suponiendo que la densidad es constante , τ (x,y,z) = cte.

Solución:

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2)\, \tau(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Como se trabaja en coordenadas cilíndricas

$$I_z = D \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_0^{\rho^2} \rho^3\, dz\, d\rho\, d\varphi = \frac{D\, a^6 \pi}{3}$$

Resumen: En este curso hemos estudiado **diferenciales** de área y de volumen para diferentes tipos de coordenadas.

Para trabajar con **integrales dobles**:

Coordenadas curvilíneas $dA = \left\| \begin{matrix} X_u & Y_u \\ X_v & Y_v \end{matrix} \right\| du\, dv$

Coordenadas Cartesianas $dA = dx\ dy$

Coordenadas Polares $dA = \rho\, d\rho\ d\theta$

Coordenadas Polares Generalizadas $dA = \rho\, a\, b\, d\rho\ d\theta$

Para trabajar con **integrales triples**:

Coordenadas curvilíneas $dV = \left\| \begin{matrix} X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \\ X_w & Y_w & Z_w \end{matrix} \right\| du\, dv\, dw$

Coordenadas cilíndricas $dV = \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz$

Coordenadas esféricas $dV = \rho^2 \operatorname{sen}\theta\ d\rho\ d\phi\ d\varphi$