INTRODUCCION- MODELADO DE PROBLEMAS

¿QUE SON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES?

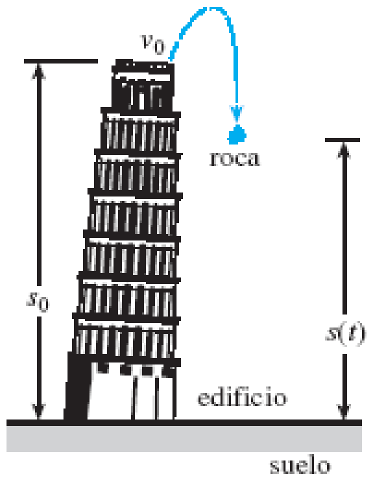
Para representar los fenómenos naturales, la realidad que es cambiante, está en movimiento, usamos una simbología especial que nos informa acerca de una velocidad de un cuerpo, de un ascenso de temperatura, de un aumento de población, de un monto de intereses, etc. Estos fenómenos los podemos ver como la variación de una magnitud respecto de otra, así pues, en matemáticas usamos las derivadas para describir estas variaciones, lo que lleva al lenguaje de las ecuaciones diferenciales para los hechos y los datos cambiantes.

Las leyes de la naturaleza, por ende, están en gran parte escritas en lenguaje matemático para poder entenderlas y trabajar con ellas.

Modelar un problema, podemos decir que es traducir una ley natural que se encuentra en expresión coloquial al lenguaje simbólico. Tarea por demás significativa para los problemas de ingeniería, que continua con: la resolución del problema, aplicando el método correspondiente y la correspondiente interpretación de los resultados obtenidos

El álgebra permite resolver muchos problemas estáticos, pero los fenómenos naturales más interesantes implican cambios y se modelan mediante ecuaciones que relacionan cantidades variables. La derivada $x' = \frac{dx}{dt} = x'(t)$ es la razón de cambio instantáneo de la variable x con respecto a la variable independiente t. Por ello es natural que las ecuaciones contengan derivadas, ya que son las que describen los cambios. Estas ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones diferenciales**.

Existen diversas metodologías para obtener la solución de una ecuación diferencial, que estudiaremos a continuación. Resolver una ecuación diferencial consiste en determinar la función incógnita, origen de las derivadas presentes en ella.



En primer lugar, presentamos algunas de las leyes naturales modeladas mediante ecuaciones diferenciales, como ejemplos.

Ejemplo 1: Caida libre

s = s(t) : altura de la caída en función del tiempo. Aceleración de la caída: $\frac{d^2s}{dt^2}$ = -g (g : aceleración de la gravedad).

Las condiciones iniciales del problema son:

t= 0 $\Rightarrow s_0$ = altura inicial

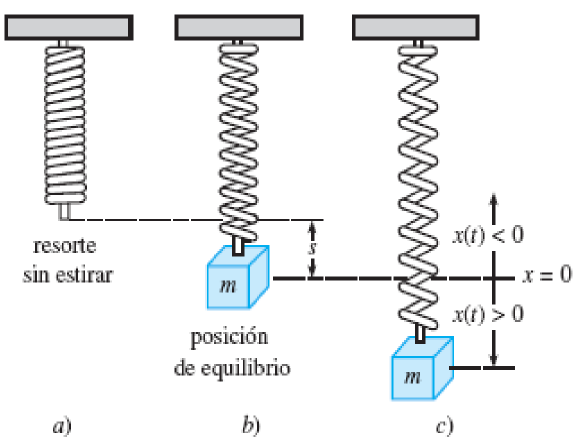
v_0 = velocidad inicial = $\frac{ds_0}{dt}$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$\boldsymbol{m\,\frac{d^2s}{dt^2} = -m\,g}$ ***o*** $\boldsymbol{\frac{d^2s}{dt^2} = -\,g}$ Ecuación diferencial que modela el problema.

La solución que se obtiene es: $s(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2 + Vo\ \ t + s_0$

Ejemplo 2 : Sistema masa – resorte



La ley de Hooke expresa que la fuerza de restitución del resorte es proporcional a su alargamiento.

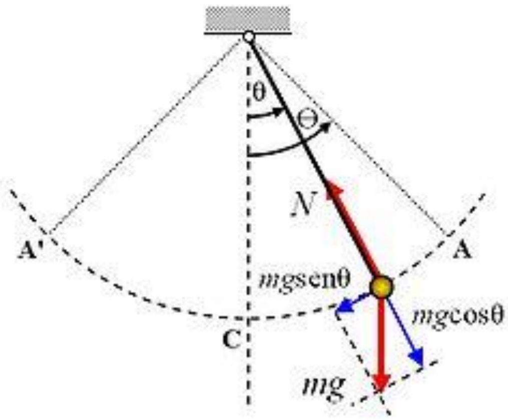
$$F = k.x(t) \quad con\ \ k > 0$$

Por equilibrio (sin amortiguación):

$$\boldsymbol{m\,.\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x(t)}$$

Ecuación diferencial que modela el problema.

Ejemplo3 :Péndulo



En este problema se trata de determinar el ángulo de desplazamiento θ en función del tiempo t.

Considerando arco = radio por ángulo, s = l .θ , la aceleración angular es: $\frac{d^2s}{dt^2} = l\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$

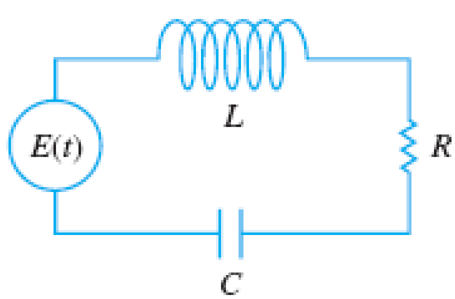
Por la segunda ley de Newton:

$$F = m.a = m.l\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -m\,g\,.sen\,\theta$$

Siendo sen θ ≈ θ ⇒

$\boldsymbol{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,sen\,\theta = 0}$Ecuación diferencial que modela el problema.

Ejemplo 4 :Circuito eléctrico



La 2° ley de Kirchoff expresa que la suma de las caídas de voltaje en un circuito es igual a la tensión aplicada al mismo.

Siendo q = q(t) la carga en un instante. La corriente es $i = \frac{dq}{dt}$⇒

$\boldsymbol{L\,\frac{d^2q}{dt^2} + R\,\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\,q = E(t)}$Ecuación diferencial que modela el problema

Ejemplo 6 :Ley de enfriamiento

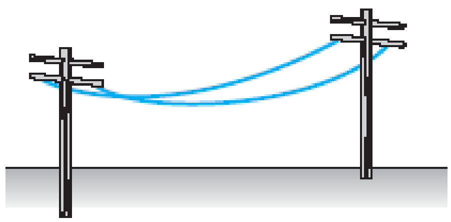
Esta ley expresa que la rapidez con que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia entre su temperatura (T) y la temperatura del ambiente (To). Su expresión es:

T = T(t) (Temperatura función del tiempo)

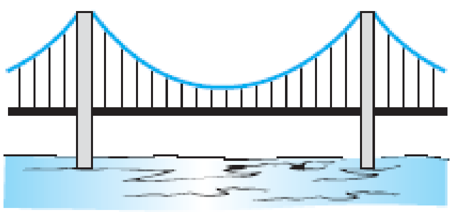
$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - To)$$

Ecuación diferencial que modela el problema.

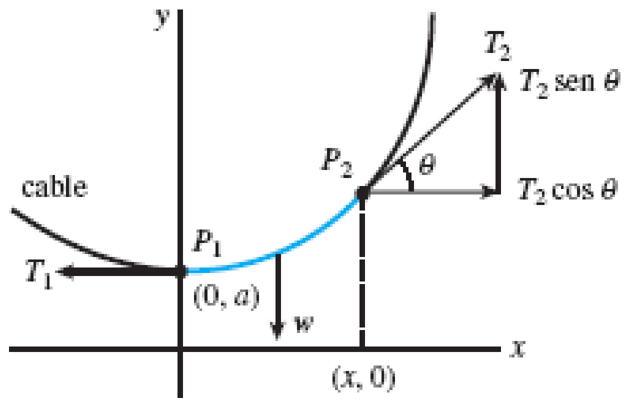
Ejemplo 7 : Cable colgante



a) Cables telefónicos



b) Puente suspendido



Hay 3 fuerzas actuando: el peso del segmento de cable P_1P_2 y las tensiones T_1 y T_2. Siendo w el peso por unidad de longitud del cable y s la longitud del segmento de cable, en equilibrio:

$T_1 = T_2\cos\theta$ y $w.\ s = T_2 \mathrm{sen}\theta$ si se dividen ambas ecuaciones

$\frac{T_2\, sen\,\theta}{T_2\cos\theta} = \frac{w\,s}{T_1} \Rightarrow tg\ \theta = \frac{w\,s}{T_1}$ por definición de derivada : $\frac{dy}{dx} = \frac{w\,s}{T_1}$ (1)

La longitud de arco es: $s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ por el teorema fundamental del cálculo.

Derivando (1) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_1}\frac{ds}{dx} = \frac{w}{T_1}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ Ecuación diferencial que modela el problema

La solución es la función y = y(x), que es la forma que adopta el cable, es la gráfica del coseno hiperbólico, llamada catenaria.

Ejemplo 8:

En Cálculo sabemos que si y = y(x), y'= y'(x) es también una función de x. Por ejemplo:

$y = e^{0,1\,x^2}$función derivable en (-∞, ∞) su derivada es:

$y' = \underbrace{e^{0,1x^2}}_{y}.\,0,2\,x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\,.\,0,2\,x$ si el dato del problema es esta última expresión la pregunta que nos hacemos es cuál es la función y=y(x) solución del problema?.

Los ejemplos anteriores son unos pocos ejemplos de modelado, algunos más complejos que otros, pero todos tienen en común que su expresión matemática es una ecuación que contiene derivadas y obtener el resultado buscado es encontrar la función que satisface esa ecuación. Las derivadas presentes en las ecuaciones son de distinto orden, primeras, segundas, etc, y las ecuaciones muy distintas unas de otras, particulares para cada problema, por lo cual existen distintos métodos de solución para ellas. El primer paso es identificar el tipo de ecuación diferencial y de acuerdo a ello aplicar el método de solución correspondiente. Es lo que estudiaremos a continuación.