UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN

Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemática

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

CÁLCULO II

ALIMENTOS – QUIMICA – INDUSTRIAL

CURSO: SEGUNDO AÑO

INTEGRALES SUPERFICIE

Equipo de cátedra:

Mg. Ing. Patricia Cuadros

Dra. Bioing. Lorena Orosco

Ing. Nicolás Sardiña

INTEGRALES DE SUPERFICIE

Las **integrales de superficie** y sus aplicaciones son los temas que se abordan a continuación. El nombre de este tipo de integrales se debe a que en lugar de integrar sobre regiones planas limitadas por curvas, se integra sobre regiones del espacio limitadas por superficies.

1. Dominio de Integración

En este tipo de integrales la región o **dominio de integración** es una **superficie**, por lo que se recuerdan algunos conceptos sobre ellas.

1.1 Parametrización de superficies

Un método para expresar analíticamente una superficie es la **representación implícita**.
La cual se expresa como un conjunto de puntos (x,y,z) que satisfacen una ecuación de la forma $F(x,y,z) = 0$. La que será muy utilizada en esta guía.
Cuando es posible despejar una de las coordenadas en función de las otras dos, por ejemplo z en función de x e y, obtenemos una **representación explícita** dada por una o varias ecuaciones de la forma $z = f(x,y)$.

Ejemplo: una esfera de radio 1 y centro en el origen de coordenadas tiene la representación implícita $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
Al despejar z, se obtienen dos ecuaciones:

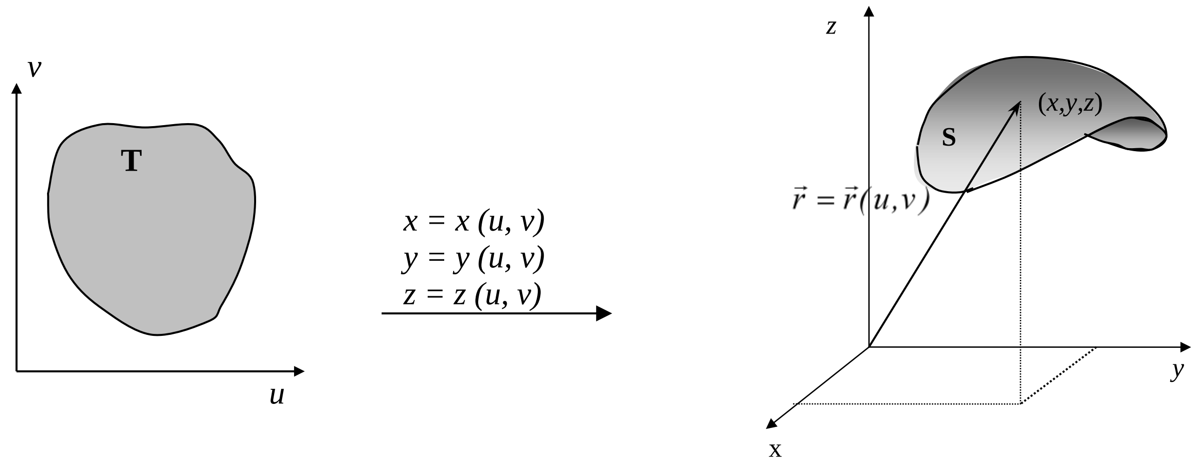
$$z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad \text{y} \qquad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

La primera es la representación explícita de la semiesfera superior y la segunda es la representación explícita de la semiesfera inferior.

Otro método de representación de superficies generales es la **representación paramétrica o vectorial** por medio de ecuaciones que expresan las variables en función de parámetros.
De manera similar a como se describe una curva mediante una función vectorial r(t) de un solo parámetro, p**odemos definir una superficie mediante una función vectorial de dos parámetros**.
Dada $z = f(x, y)$ su **representación paramétrica** en función de dos parámetros $\boldsymbol{u, v}$ está dada por las ecuaciones: $\boldsymbol{x = x(u, v)}$; $\boldsymbol{y = y(u, v)}$; $\boldsymbol{z = z(u, v)}$. El punto (u, v) varía en un conjunto conexo bidimensional T en el plano u v, y los puntos (x, y, z) correspondientes constituyen una porción de superficie en el espacio xyz. Este método es análogo al de la representación de una curva en $\mathbf{R}^3$, mediante tres ecuaciones con **un** parámetro.

Si se introduce el radio vector $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ que une el origen a un punto genérico (x, y, z) de la superficie, se puede combinar las tres ecuaciones paramétricas en una **ecuación vectorial**:

$\vec{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{x}\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z}\,(\mathbf{u},\mathbf{v})\,\vec{\mathbf{k}}$, donde (u, v) $\in$ T, este vector describe la superficie.



Ver en **ANEXO- INTEGRALES DE SUPERFICIE** ejemplos de representación paramétrica de superficies y parametrización de una superficie de revolución

2. Área de una superficie alabeada

2.1. Producto vectorial fundamental.

Se considera una superficie representada por la ecuación vectorial:

$\vec{r}\,(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}$; donde $(u,v) \in$ T

Si x, y, z son funciones de u, v; con derivadas parciales continuas en T podemos considerar los vectores:

$$\vec{r}_u = \frac{\partial\ \vec{r}}{\partial\ u} = \frac{\partial\ \vec{x}}{\partial\ u}\vec{i} + \frac{\partial\ \vec{y}}{\partial\ u}\vec{j} + \frac{\partial\ \vec{z}}{\partial\ u}\vec{k}\,, \qquad \vec{r}_v = \frac{\partial\ \vec{r}}{\partial\ v} = \frac{\partial\ \vec{x}}{\partial\ v}\vec{i} + \frac{\partial\ \vec{y}}{\partial\ v}\vec{j} + \frac{\partial\ \vec{z}}{\partial\ v}\vec{k}$$

Se considera en T un segmento rectilíneo horizontal. Su imagen por $\vec{r}$ es una curva (llamada u-curva) situada en $\vec{r}(T)$.

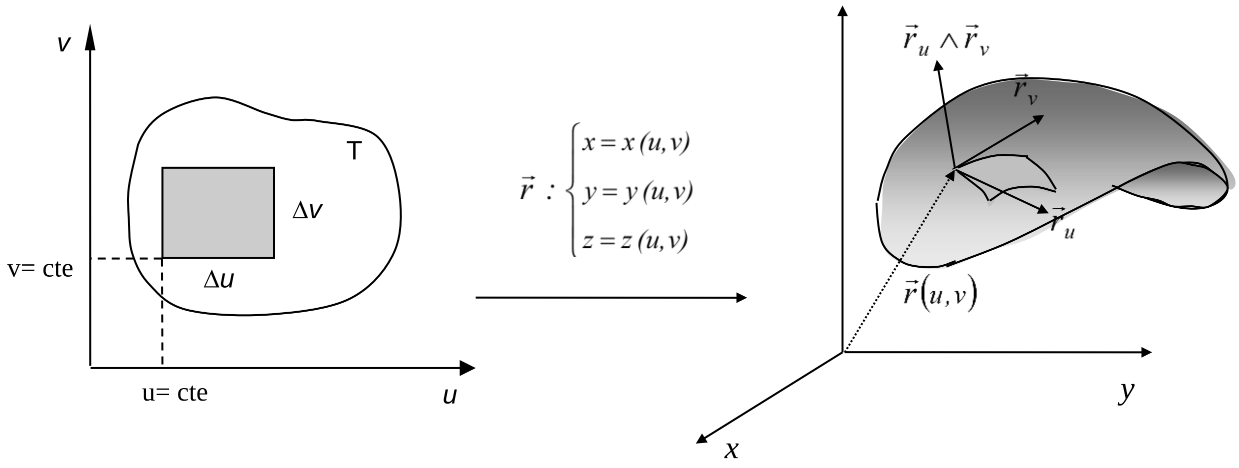
Si $v = cte = c_2$, entonces $\vec{r}\,(u,c_2) = x(u,c_2)\,\vec{i} + y(u,c_2)\,\vec{j} + z(u,c_2)\,\vec{k} = \vec{r}^{\,*}(u)$

Luego: $\vec{r}_u = \vec{r}_u(u,c_2)$ es el **vector tangente** a la curva generada por v = cte.

Si $u = cte = c_1$

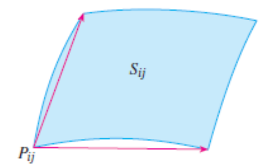
$\vec{r}\,(c_1,v) = x(c_1,v)\,\vec{i} + y(c_1,v)\,\vec{j} + z(c_1,v)\,\vec{k} = \vec{r}^{\,*}(v)$ por lo que

$\vec{r}_v = \vec{r}_v(c_1, v)$ es el **vector tangente** a una curva generada por u = cte.

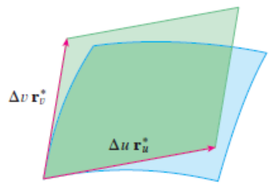


Un rectángulo en T que tenga un área $\Delta u\ \Delta v$ se convierte en una porción de $\vec{r}(T)$ que se aproxima por un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{r}_u\ \Delta u$ y $\vec{r}_v\ \Delta v$. El área del paralelogramo determinado por $\vec{r}_u\ \Delta u$ y $\vec{r}_v\ \Delta v$ es el módulo de su producto vectorial

$$\| \vec{r}_u\ \Delta u \ \wedge\ \vec{r}_v\ \Delta v \| = \| \vec{r}_u \ \wedge\ \vec{r}_v \| \Delta u\ \Delta v$$



a)

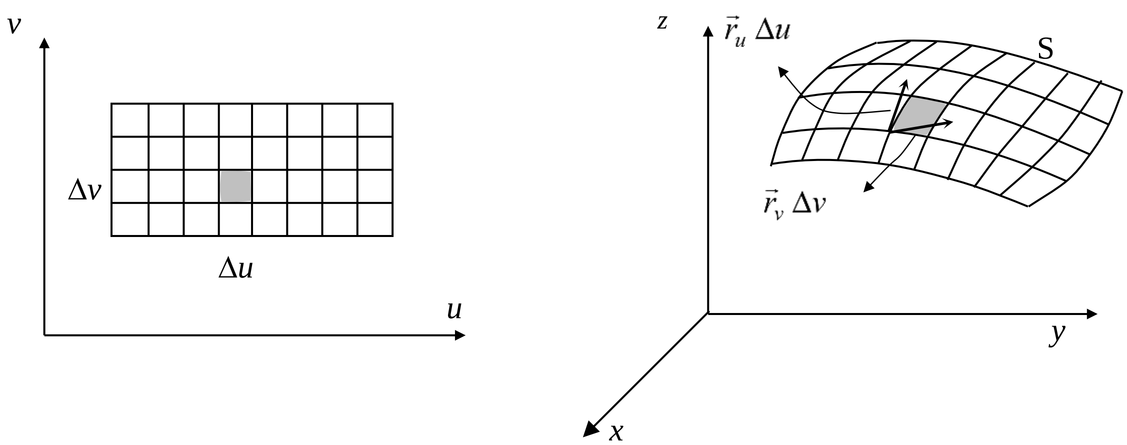


b)

Sea $\vec{r} = \vec{r}(u,v) \longrightarrow d\vec{r} = \vec{r}_u\ du + \vec{r}_v\ dv$

$si\ v = cte \rightarrow\ \ d_u\vec{r} = \vec{r}_u\ du$ es paralelo a $\vec{r}_u$,

$si\ u = cte \rightarrow\ \ d_v\vec{r} = \vec{r}_v\ du$ es paralelo a $\vec{r}_v$



Luego el diferencial de superficie es: $\boxed{dS = \| \vec{r}_u \, du \wedge \vec{r}_v \, dv \| = \| \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \| du \, dv}$

Así, **la norma del producto vectorial fundamental de $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$ se puede considerar como un factor de proporcionalidad de las áreas**.

2.2. Definición de área de una superficie alabeada

Sea S = $\vec{r}(T)$ una superficie paramétrica representada por la función $\vec{r}$ definida en una región T del plano uv. Un rectángulo en T de áreas $\Delta u \, \Delta v$ es aplicado por $\vec{r}$ sobre un paralelogramo curvilíneo en S con área aproximadamente igual a:

$$\| \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \| \Delta u \, \Delta v$$

Si (u,v) es un punto en T en el cual $\vec{r}_u$ *y* $\vec{r}_v$ son continuas y el producto vectorial fundamental no es nulo, el punto imagen $\vec{r}(u,v)$ se llama **punto regular** de r. Una **superficie** $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ se llama **regular** o suave (sin discontinuidades) si todos sus puntos son regulares,. En cada punto regular los vectores $\vec{r}_u$ *y* $\vec{r}_v$ determinan un plano que tiene el vector $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$ como normal. **<u>El plano determinado por $\vec{r}_u$ *y* $\vec{r}_v$ es el plano tangente a la superficie.</u>**

Los puntos en los que no son continuas $\vec{r}_u$ *ó* $\vec{r}_v$, o bien $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v = 0$, se llaman **puntos singulares** de $\vec{r}$. En los puntos en que este producto vectorial es nulo el paralelogramo degenera en una curva o un punto.

La continuidad de $\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v$ determina que no existen aristas o "puntos singulares" en la superficie, la no anulación de $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$ evita los casos de degeneración antes citados.

2.3. **Definición de área de una superficie paramétrica**:

El área de una superficie S, que se representa por A(S) , se define por la integral

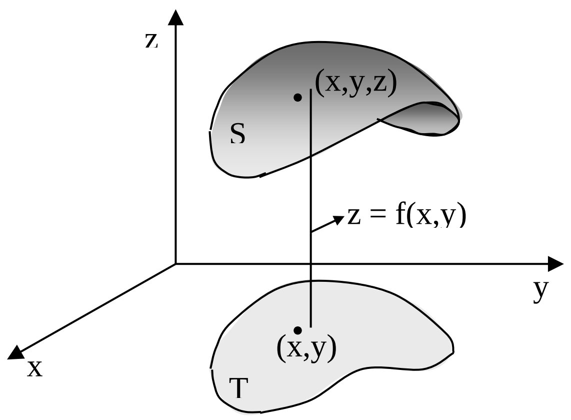
$$\mathrm{A(S)} = \iint_S \mathrm{dS} = \iint_T \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| \, du \, dv$$

Observe que **S representa una superficie alabeada en el espacio** y **T una región plana en uv**.

2.4. Área de superficies alabeadas en coordenadas cartesianas

Si S está dada en forma explícita por una ecuación de la forma z = f(x,y), se usa x e y como parámetros, o sea x = x, y = y, z = f(x,y) obteniendo la siguiente ecuación vectorial $\vec{r}(x,y) = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + f(x,y)\ \vec{k}$

Esta representación nos da siempre una superficie paramétrica simple. La región T es la proyección de la superficie S sobre el plano xy.



Para calcular el producto vectorial fundamental se calcula:

$$\vec{r}_x = \vec{i} + f_x\ \vec{k} \qquad \vec{r}_y = \vec{j} + f_y\ \vec{k}$$

Si f (x,y) es diferenciable se obtiene:

$$\vec{r}_x \ \wedge\ \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\ \vec{i} - f_y\ \vec{j} + \vec{k}$$

Puesto que la **componente** z de $\vec{r}_x \ \wedge\ \vec{r}_y$ es 1, el producto vectorial fundamental nunca es cero. Luego los únicos puntos singulares que pueden presentarse por esta representación son aquellos puntos en los que al menos una de las derivadas parciales f_x ó f_y no sea continua.

En este caso,

$$\left\| \vec{r}_x \ \wedge\ \vec{r}_y \right\| = \left\| -f_x\ \vec{i} - f_y\ \vec{j} + \vec{k} \right\| = \sqrt{1 + f_x{}^2 + f_y{}^2}$$

$$dS = \left\| \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y \right\| \, dx \, dy = \sqrt{1 + f_x^{\,2} + f_y^{\,2}} \; dx \; dy$$

La integral para calcular el área de la superficie toma la forma:

$$\boxed{A(S) = \iint_S dS = \iint_T \sqrt{1 + f_x^{\,2} + f_y^{\,2}} \; dx \; dy}$$

Nota: Cuando S está en un plano paralelo al plano xy, la función f(x,y) es constante , de modo que $f_x = f_y = 0$, luego

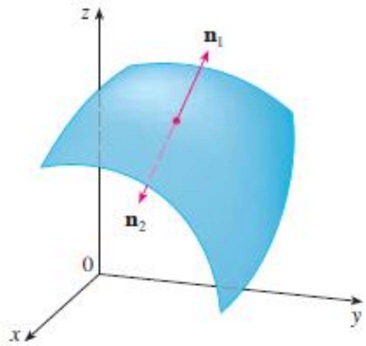
$$A(S) = \iint_T dx \; dy$$

que coincide con la forma corriente para el **cálculo de áreas de regiones planas**.

Ejercicio: Cuando trabaja con $A(S) = \iint_S dS = \iint_T \sqrt{1 + f_x^{\,2} + f_y^{\,2}} \; dx \; dy$ determine y grafique los dominios de integración S y T. Indique qué tipo de integrales se relacionan.

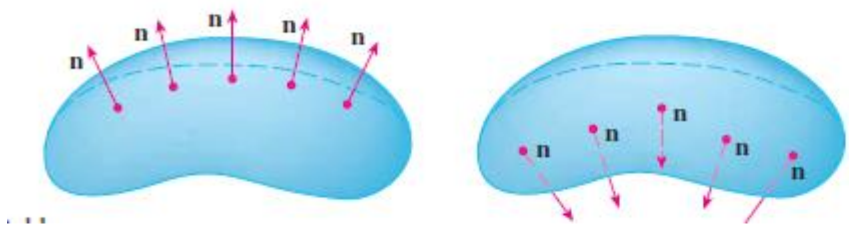
2.5. Expresiones de dS

Existen distintas expresiones de dS que facilitan el cálculo del área de una superficie. Se deduce **una** de las expresiones de **d*S***.



Una superficie S que tiene un plano tangente en todo punto (x,y,z) en S, hay dos vectores normales unitarios en (x,y,z) $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2 = -\bar{n}_1$

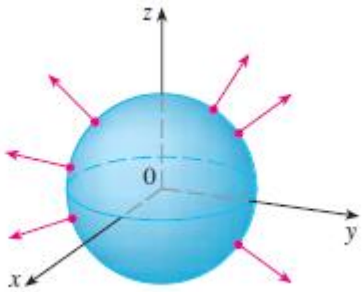
Si es posible elegir un vector unitario n en cada punto (x,y,z) de manera que n varia continuamente sobre S, entonces S se llama superficie orientada y la elección dada de n da la orientación a S. Hay dos posibles orientaciones para cualquier superficie orientada.

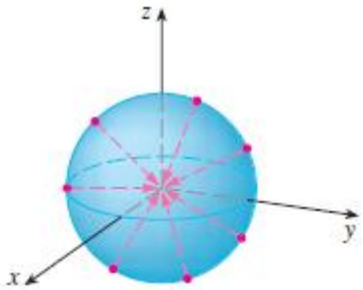


Para una superficie z = f(x,y) dada : $r_x \wedge r_y = -\frac{\partial f}{\partial x}\, i - \frac{\partial f}{\partial y}\, j + k$

El vector normal unitario es: $n = \frac{r_x \wedge r_y}{|r_x \wedge r_y|} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x} i - \frac{\partial f}{\partial y} j + k}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$

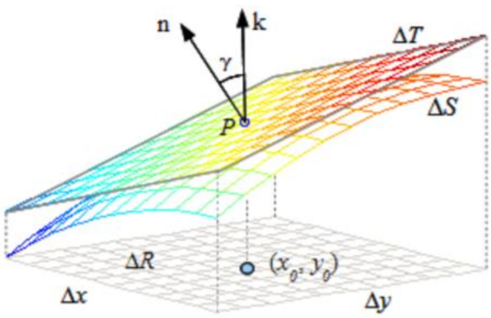
Como la componente k es positiva, da la orientación hacia arriba de la superficie. Para una superficie cerrada, la convención es que la orientación positiva es aquella a la que apuntan los vectores normales hacia fuera de S.





Orientación positiva orientación negativa

En cada punto de *S*, definida por *z* = *f(x,y)* se considera el ángulo γ formado por el vector normal $\vec{n} = \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y$ y el vector unitario $\vec{k}$



Si $z = f(x,y)$ el vector normal queda:

$$\vec{n} = \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = -f_x\,\vec{i} - f_y\,\vec{j} + \vec{k}$$

Se realiza el producto escalar $\vec{n} \cdot \vec{k} \underset{def}{=} \|\vec{n}\|\ \|\vec{k}\|\ \cos\gamma$

para **los versores** $\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y}{\|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y\|}$ y $\vec{k}$ el producto escalar es

$\vec{n}.\vec{k} = \dfrac{(-f_x\ \vec{i} - f_y\ \vec{j} + \vec{k})}{\left\| \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y \right\|}.\vec{k}$ y como el versor $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$, entonces

$\cos\gamma = \dfrac{1}{\left\| \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y \right\|}$ por lo que $\left\| \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y \right\| = \dfrac{1}{\cos\gamma}$

Luego: $dS \underset{def}{=} \left\| \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \right\| du\,dv = \left\| r_x \wedge r_y \right\| dx\,dy = \dfrac{1}{\cos\gamma} dx\,dy$

Este dS permite calcular el área de una superficie S, o sea una **integral de superficie transformándola** en una **integral doble**.

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_T \left\| \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \right\|\ du\ dv = \iint_T \frac{1}{\cos\gamma}\ dx\ dy$$

Teniendo en cuenta que $\cos\gamma = \cos(\vec{n},z) = \cos(\vec{n},\vec{k})$, se expresa el diferencial de superficie como

$$dS = \frac{dx\ dy}{\cos(\vec{n},z)} = \frac{dx\ dy}{\cos(\vec{n},\vec{k})}$$

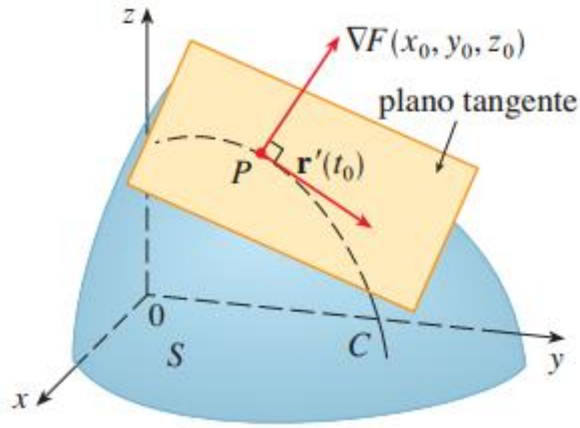
Y la integral que calcula el área como

$$\boxed{A(S) = \iint_T \frac{1}{\cos(\vec{n},z)}\ dx\ dy = \iint_T \frac{1}{\cos(\vec{n},\vec{k})}\ dx\ dy}$$

Por analogía para:

- $x = f(y,z)$ el diferencial de superficie toma la forma $dS = \dfrac{dy\ dz}{\cos(\vec{n},x)} = \dfrac{dy\ dz}{\cos(\vec{n},\vec{i})}$

- $y = g(x,z)$ el diferencial de superficie toma la forma $dS = \dfrac{dx\ dz}{\cos(\vec{n},y)} = \dfrac{dx\ dz}{\cos(\vec{n},\vec{j})}$



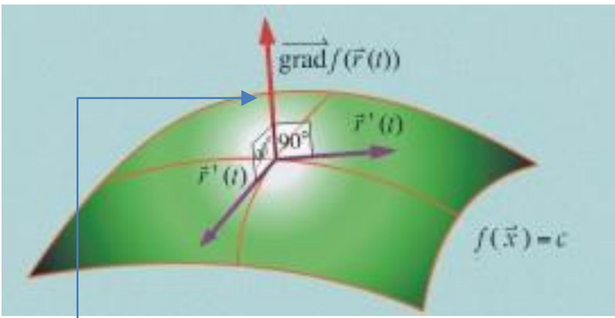
Ver otras deducciones de **d*S*** en **ANEXO- INTEGRALES DE SUPERFICIE .**

Ejemplo:

Encuentre el área lateral de la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ interceptado por el plano $z = 4$.

Solución:

Se va a calcular $A(S) = \iint_S dS$

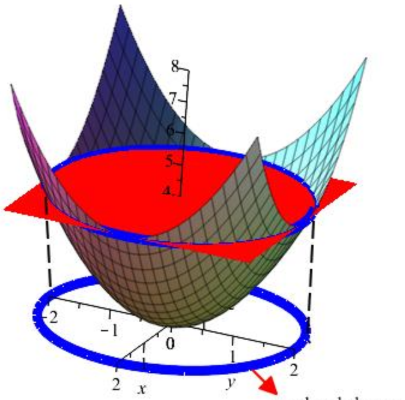


se utiliza $dS = \dfrac{dxdy}{cos(\vec{n},\vec{z})}$

Para la superficie dada la normal exterior es

$$\vec{n} = \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} = \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|}$$

$$cos(\vec{n},\vec{z}) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$



Así el área lateral se plantea de la siguiente manera

$$A(S) = \iint_T \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dydx$$

Para su resolución se utilizan coordenadas polares obteniendo:

$$A(S) = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} 8\sqrt{1+4\rho^2}\ \rho d\rho d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (1+4\rho^2)^{3/2}\frac{2}{3}\Big|_0^2\ d\theta = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

3. Integral de superficie para campos escalares

Para calcular una integral de superficie es necesario que su dominio de integración sea una función escalar con condiciones de integrabilidad.
Trabajamos con un campo escalar $f = f(x,y,z)$ definido y continuo en S, con derivadas parciales primeras continuas en T y una expresión escalar para el dS:

$$dS = \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| \; du \, dv$$

Luego

$$\boxed{\iint_S f \;\; dS = \iint_T f \;\; [\vec{r}(u,v)] \; \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| \; du \, dv}$$

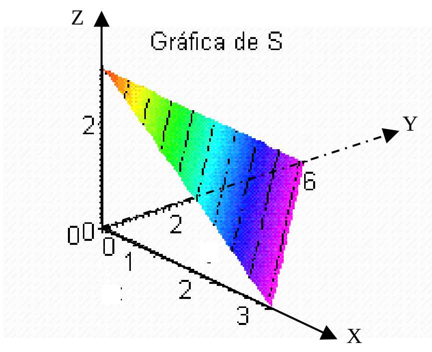
4. Aplicaciones

4.1 - El campo escalar es $f = f(x,y,z) = 1$.

El área de una superficie alabeada se calcula:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_T \|\vec{r}_u \;\wedge\; \vec{r}_v\| \; du \;\; dv = \iint_T \frac{1}{\cos\gamma} \;\; dx \;\; dy$$

Ejemplo: Calcular el área lateral de la porción del plano 2x + y + 2z = 6, ubicada en el primer octante.
Solución:



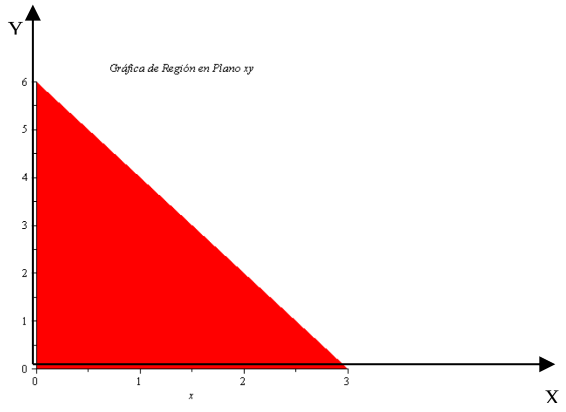
Se trabaja con la expresión del plano en forma explícita $z = \frac{1}{2}(6 - 2x - y)$

Para calcular el d*S*, se necesita calcular el versor normal

$$\vec{n} = \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}\left(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right)$$, luego $cos(\vec{n},\vec{z}\,) = \frac{2}{3}$ por lo que

$$dS = \frac{1}{cos(\vec{n},\vec{z}\,)}\,dx\,dy = \frac{3}{2}\,dx\,dy$$

Por lo que el área lateral es: $A(S) = \iint_S dS = \int_0^3 \int_0^{6-2x} \frac{3}{2}\,dy\,dx = 9$



Ver en **ANEXO-INTEGRALES DE SUPERFICIE** resolución con MAPLE

4.2. Centro de gravedad.

Si el campo escalar $f = f(x,y,z)$ se interpreta como la densidad (masa por unidad de área) de una lamina delgada adaptada a la superficie *S*, la masa total m de la superficie se define por la formula

$$m = \iint_S f(x,y,z)\ dS$$

Su centro de gravedad, el punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ es determinado por las fórmulas.

$$\bar{x}_m = \iint_S x\ \ f(x,y,z)\ dS \qquad ; \qquad \bar{y}_m = \iint_S y\ \ f(x,y,z)\ dS$$

$$\bar{z}_m = \iint_S z\ \ f(x,y,z)\ dS$$

4.3. Momento de inercia

El momento de inercia I_L de S alrededor de un eje L cualquiera viene dado por:

$$I_L = \iint_S \delta^2(x,y,z) \quad f(x,y,z)\ dS$$

donde $\delta / x,y,z)$ representa la distancia de un punto genérico (*x,y,z*) de S a la recta L.

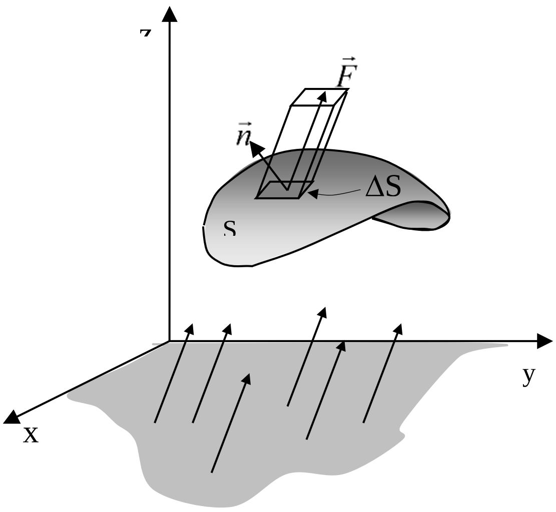
Ejemplo 7: Determinar el centro de gravedad de la superficie de una semiesfera de radio a.
Ver solución en **ANEXO INTEGRALES DE SUPERFICIE**

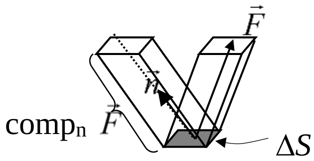
Integral de superficie de campos vectoriales

5. Flujo

Una de las aplicaciones principales de las integrales de superficie de campos vectoriales es el cálculo del flujo de un fluido a través de una superficie S.
Los vectores físicos, mecánicos o geométricos, son cantidades dirigidas, diferenciándose los primeros en que se extienden en una región, donde, pasando de un punto al otro, varían en magnitud y dirección en forma continua, por no estar confinados en un punto de aplicación determinado. La región en donde varía el vector es su campo.
Para cada punto aislado ambas especies de vectores se identifican en la misma definición y, por consiguiente, las operaciones básicas, suma, producto, etc., les son comunes y se efectúan en igual forma.
La propiedad de extenderse en el espacio, implica la definición de una nueva magnitud característica, que es el **flujo**, es una magnitud escalar.
Flujo, de manera general, es "cantidad" que fluye por unidad de tiempo (en un lugar especificado).
Por ejemplo en un río, respecto de un punto referencial en una orilla del río podemos decir que el flujo es de 3 m^3/seg. En general, todo fluido *fluye*.
De manera que cuando queremos medir flujo de algo, debemos establecer en primer lugar el sitio donde vamos a contar el flujo, el sitio donde pasará el material o el fluido. Pensemos entonces en una superficie cerrada (que puede ser virtual)
Supongamos una superficie *S* inmersa en un fluido que tiene un campo de velocidades $\vec{F}$, (considere a S como una superficie imaginaria que no impide el flujo de fluidos, como una red de pesca en un rio o la cámara de una turbina) y sea ΔS el área de un trozo pequeño de superficie *S* (área

de un elemento infinitesimal de superficie) sobre el cual se puede considerar $\vec{F}$ aproximadamente constante. La cantidad de fluido (volumen del fluido) que atraviesa esta región por unidad de tiempo está determinada aproximadamente por el volumen de la columna de altura $\vec{F}.\vec{n}$ (siendo este producto la magnitud de la velocidad del fluido que pasa por el elemento diferencial de superficie en dirección de la normal **n)**





Por lo tanto, el volumen del fluido $\Delta\Phi$ que atraviesa el elemento infinitesimal de superficie ΔS por unidad de tiempo está determinado por: $\Delta\Phi = \vec{F}\,.\vec{n}\ \Delta S$

El volumen total del fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo (flujo total) se define sumando los $\Delta\Phi_i = \vec{F}_i\,.\vec{n}_i\ \Delta S_i$ correspondientes a cada elemento infinitesimal de superficie se suman, esto es $\sum_{i=1}^{n} \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{n}_i\ \Delta S_i$ tomando el límite cuando $\|\mathbf{P}\|$ tiende a cero $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\Phi_i$ se llega a la definición de flujo.

5.1. Definición de flujo

El flujo total de $\vec{F}$ a través de S se calcula mediante la integral de superficie como: $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS$.

Si ρ(x,y,z) representa la densidad del fluido, entonces $\Phi = \iint_S \rho\,\vec{F} \cdot \vec{n}\ dS$ representa la masa de fluido que emana a través de S por unidad de tiempo.

Observaciones:

- La naturaleza del campo vectorial determina diversas clases de flujo que se calculan con la integral definida anteriormente, por ejemplo flujo eléctrico, flujo magnético, flujo de calor, etc.

  Por ejemplo si **E** es un campo eléctrico, la integral de superficie $\iint_S E.n.dS$ se denomina flujo eléctrico de E por la superficie S. Una ley importante de electroestática es la ley de Gauss, que dice que la carga neta encerrada por una superficie cerrada S es: $Q = \varepsilon_0.\iint_S E.n.dS$, siendo ε_0 una constante llamada permitividad del espacio libre.

  Otra aplicación es el cálculo del flujo térmico. Suponga que la temperatura en un punto de un cuerpo está dada por u(x,y,z), entonces la rapidez de flujo térmico por la superficie S del cuerpo está dada por: $-k.\iint_S \nabla u.n.dS$, siendo k una constante llamada conductividad de la sustancia.
- Toda superficie tiene dos vectores normales:

  Si la superficie es abierta uno superior (con componente k positiva) y otro inferior.

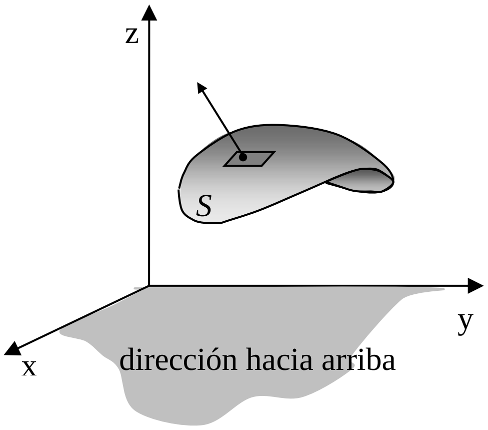
  Si la superficie es cerrada uno exterior y otro interior.

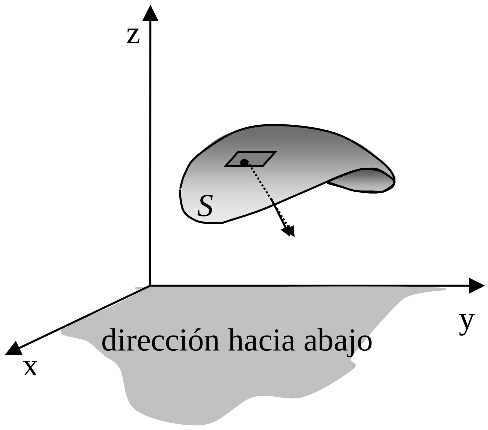
El gradiente proporciona un método conveniente para encontrar un vector normal unitario.

Para una superficie *S* definida por *z* = *g(x,y)*, podemos determinar, de ser posible, dos funciones implícitas *G*: *z* - *g(x,y)* = 0 ; *g(x,y)* – *z* = 0, generando esto los vectores unitarios respectivos

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} G}{\left\|\vec{\nabla} G\right\|} = \frac{-g_x(x,y)\vec{i} - g_y(x,y)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+\left[g_x(x,y)\right]^2 + \left[g_y(x,y)\right]^2}}$$

$$\vec{n} = \frac{-\vec{\nabla} G}{\left\|\vec{\nabla} G\right\|} = \frac{g_x(x,y)\vec{i} + g_y(x,y)\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1+\left[g_x(x,y)\right]^2 + \left[g_y(x,y)\right]^2}}$$





Si se toma de referencia la normal externa, se determina el carácter del flujo emanado.
El flujo Φ puede ser positivo, negativo o nulo.
Si Φ es positivo, predomina el saliente.
Si Φ es negativo, prevalece el flujo entrante.
Si Φ es nulo puede significa que el vector dentro del recinto no existe, o bien que los flujos entrantes y salientes son iguales, en cuyo caso el flujo resultante es pasante.

Ejemplo:

Calcular el flujo del vector $\vec{F} = yz\ \vec{i} + zx\ \vec{j} + yx\ \vec{k}$; a través de una esfera de radio a.

Solución:

El versor normal a la esfera es $\vec{n} = \frac{x}{a}\vec{i} + \frac{y}{a}\vec{j} + \frac{z}{a}\vec{k}$, por lo que $cos(\vec{n},z) = \frac{z}{a}$,

y el diferencial de superficie correspondiente es $dS = \frac{a}{z}dxdy$.

Luego: $\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{yzx}{a} + \frac{zxy}{a} + \frac{yxz}{a} = \frac{3\,y\,zx}{a}$

$\vec{F}\cdot\vec{n}dS = \frac{3\,y\,\cancel{z}x\,\cancel{a}}{\cancel{a}\quad\cancel{z}}dxdy$. Por lo que el flujo es: $\Phi = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = \iint_T 3yxdxdy$

Se ha **transformado** la integral de superficie en una integral doble.
Se utilizan coordenadas polares proyectando sobre el plano xy.

$$\Phi = \iint_T 3xydxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} 3\rho^3\cos\theta\ \mathrm{sen}\theta\ d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{4}\rho^4 \Big|_0^a \cos\theta \ \text{sen}\theta d\theta = \quad = \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} a^4 \cos\theta \ \text{sen}\theta \ d\theta = \frac{3}{4} a^4 \cdot \frac{\text{sen}^2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = \quad 0$$

6. Divergencia y rotor de un campo vectorial

6.1. Operador Nabla de Hamilton

Hamilton introdujo el operador simbólico (nabla o delta invertido) definido por:

$$\overline{\nabla} = \vec{i}\ \frac{\partial}{\partial\ x} + \vec{j}\ \frac{\partial}{\partial\ y} + \vec{k}\ \frac{\partial}{\partial\ z}$$

lo que determina un seudo vector ya que solo indica operaciones a realizar.

Se considera cuando:

a) el operador nabla está **aplicado** a una función escalar *U = U(x,y,z)*

$$\overline{\nabla}\, U = \left(\vec{i}\ \frac{\partial}{\partial\ x} + \vec{j}\ \frac{\partial}{\partial\ y} + \vec{k}\ \frac{\partial}{\partial\ z} \right) U = \frac{\partial\ U}{\partial\ x}\vec{i} + \frac{\partial\ U}{\partial\ y}\vec{j} + \frac{\partial\ U}{\partial\ z}\vec{k}$$

Se obtiene un **vector** llamado **gradiente de *U***, $\overline{\nabla} U$ = grad *U*

b) si el operador nabla está **multiplicado escalarmente** por un campo vectorial

$\vec{F}(x,y,z) = P\ (x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\ \vec{j} + R(x,y,z)\ \vec{k}$ campo vectorial

$$\overline{\nabla}\ \cdot\ \vec{F} = \left(\vec{i}\ \frac{\partial}{\partial\ x} + \vec{j}\ \frac{\partial}{\partial\ y} + \vec{k}\ \frac{\partial}{\partial\ z} \right) \cdot\ (P\ \vec{i} + Q\ \vec{j} + R\ \vec{k}) = \frac{\partial\ P}{\partial\ x} + \frac{\partial\ Q}{\partial\ y} + \frac{\partial\ R}{\partial\ z}$$

Se obtiene un **escalar** denominado **divergencia de** $\vec{F}$ **,** $\overline{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{div}\vec{F}$

c) si el operador nabla **multiplicado vectorialmente** por un campo vectorial

$\vec{F}(x,y,z) = P\ (x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\ \vec{j} + R(x,y,z)\ \vec{k}$ campo vectorial

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Se obtiene un **vector** denominado el **rotor de** $\vec{F}$, $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\text{rot }\vec{F}$

Ejercicio: Dado los campos $\vec{F}(x,y,z)=zy\vec{i}+2zy\,\vec{j}+3xy\vec{k}$ y $f=f(x,y,z)=sen(xy)+3zx$, calcular $\overline{\nabla}f=grad\ f$; $\vec{\nabla}.\vec{F}=\boldsymbol{d}iv\ \vec{F}$ y $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\boldsymbol{rot}\ \vec{F}$ según corresponda.

Solución:

$$\overline{\nabla}f=grad\ f=\left(y\cos(xy)+3z\right)\vec{i}+x\cos(xy)\,\vec{j}+3x\,\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=div\ \vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2z$$

$$rot\ \vec{F}=\nabla\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}=$$

$$=\left(3x-2y\right)\vec{i}+\left(y-3y\right)\vec{j}+\left(0-z\right)\vec{k}$$

Luego el rotor del **campo vectorial** es:

$$rot\ \vec{F}=\nabla\wedge\vec{F}=\left(3x-2y\right)\vec{i}+\left(-2y\right)\vec{j}+\left(-z\right)\vec{k}$$

Otras operaciones con el operador $\vec{\nabla}$ (ver en **ANEXO INTEGRALES de SUPERFICIE**)

6.2. Divergencia

Si $\vec{V}$ es un campo de velocidades en el movimiento de un fluido, la $div\vec{V}$ representa la variación de flujo por unidad de volumen (velocidad de expansión por unidad de volumen) en cada punto.

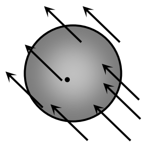
$$div\ \vec{V}=\frac{d\Phi}{dV}=\frac{\Phi_s-\Phi_e}{dV}=\text{ variación del flujo por unidad de volumen.}$$

En un sistema de fluidos, la divergencia también se puede interpretar como una medida de la densidad del fluido en un punto, en otras palabras la divergencia mide la tendencia del fluido a divergir (alejarse) del punto (x,y,z), entonces es una medida de la compresibilidad del fluido.

- Si es $div\,\vec{V} = 0$, el fluido se llama incompresible.

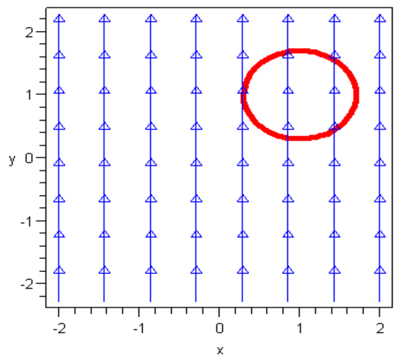
$$div\ \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{d\Phi}{dV} = 0 \rightarrow \Phi = cte \Rightarrow \Phi_e = \Phi_s$$

En un campo electromagnético, si $div\,\vec{V} = 0$, se dice que el campo vectorial es solenoidal.



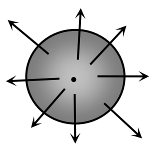
$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{F}} = 0$

Ejemplo 1: Sea $\vec{\mathrm{F}}(x,y) = 2\,\bar{\mathrm{j}}$. Comprobar que $\mathrm{div}\left(\vec{\mathrm{F}}\right) = \vec{\nabla}.\vec{\mathrm{F}} = 0$.
Esto se puede ver en un gráfico del campo vectorial y una circunferencia en este gráfico.



La Figura permite observar que los vectores que "entran" en la circunferencia son igual en magnitud que los vectores que "salen", esto indica que la cantidad de fluido que "entra" es la misma cantidad que "sale". En este caso la divergencia es cero.

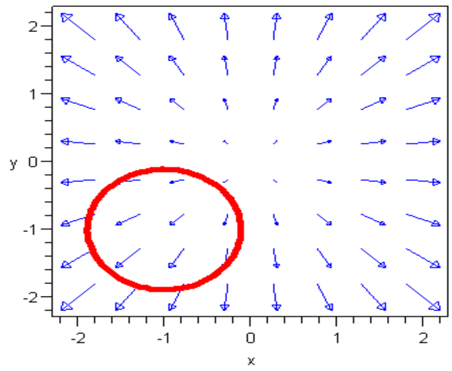
- Si es $div\,\vec{V} > 0$ (positivo), el fluido se expande (aumenta su volumen)



$div\,\vec{F} > 0$

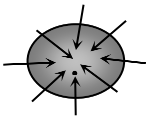
Ejemplo 2: Sea $\vec{F}(x,y) = x\bar{i} + y\bar{j}$

Es fácil comprobar que $\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla}.\vec{F} = 2$. Esto se puede ver en un gráfico del campo vectorial y una circunferencia en este gráfico.



Para este campo, la Figura muestra que los vectores que "entran" hacia la circunferencia son más cortas que los que "salen". Esto indica que el flujo neto afuera de la circunferencia es positivo (es decir, hay más fluido saliendo que entrando). En este caso la divergencia es positiva.

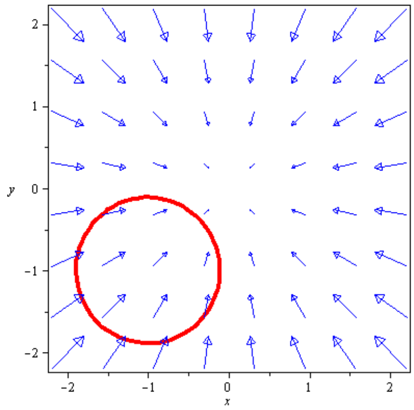
- Si es $div\vec{V} < 0$ (negativo), el fluido se contrae (disminuye su volumen)



$divF < 0$

- Finalmente, el concepto de **divergencia cero** es muy importante en la dinámica de fluidos y la electrodinámica. Esto indica que, aunque el fluido se mueve libremente, su **densidad permanece constante**. Esto es particularmente útil cuando se modelan fluidos incompresibles, como el agua.

Ejemplo 3: Sea $\vec{F}(x,y) = -x\bar{i} - y\bar{j}$. Es fácil comprobar que $\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla}.\vec{F} = -2$. Esto se puede ver en un gráfico del campo vectorial y una circunferencia en este gráfico.



Para este campo, la Figura muestra que los vectores que "entran" hacia la circunferencia son más largos que los que "salen". Esto indica que el flujo neto afuera de la circunferencia es negativo (es decir, hay más fluido entrando que saliendo). En este caso la divergencia es negativa.

6.2 Rotor. Campos irrotacionales o conservativos.

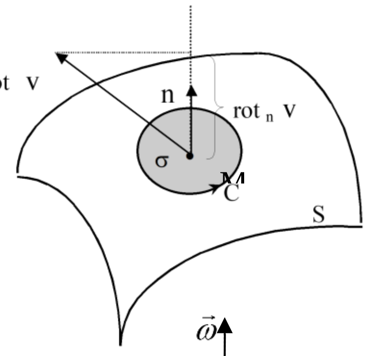
La circulación se interpreta en un campo de fuerzas como **trabajo** de una partícula que se desplaza. Otra interpretación de la circulación a lo largo de una curva abierta o cerrada se obtiene en un campo de velocidades $\vec{V} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ de un fluido, pues en tal caso da una medida de la **circulación general (positiva o negativa) del fluido a lo largo de la curva en el sentido elegido.**

Si en un recinto simplemente conexo la curva C es cerrada y la circulación por ella no es nula, ello indica que en una superficie limitada por C el movimiento tiene un carácter general rotatorio; por tal razón cuando la **circulación** es **nula sobre toda curva cerrada C**, el movimiento y el campo $\vec{V}$, se llaman **irrotacional o conservativo**.

En el caso general, si la curva cerrada C se contrae hacia un punto M de modo que tienden a cero tanto el área σ de una superficie *S* que la tenga por borde, como su diámetro, la circulación sobre ella tiende a cero, pero no así en general su cociente por el área σ. El límite de ese cociente depende de la dirección $\vec{n}$ de la normal a *S*. Veremos que define un vector, llamado **circulación** en el punto M, o **rotor** del campo en M, indicado por $rot\,\vec{V}$, cuya componente según $\vec{n}$ es:

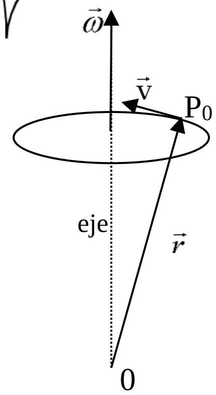
$$(rot\ \vec{V})_{\vec{n}} = rot_{\vec{n}}\ \vec{V} = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma} \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

O sea que: $rot_{\vec{n}}\ \vec{V} = (\overline{\nabla} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n}$



Observación:

Si $\vec{V}$ es el vector velocidad, se puede demostrar que:



rot $rot\ \vec{V} = 2\vec{\omega}$ donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular

El concepto de "Rotacional" fue introducido primero por Maxwell (físico escocés 1831-1879) en sus estudios de campos electromagnéticos, sin embargo este concepto (el rotacional) se entiende fácilmente en relación con el flujo de fluidos. Si un dispositivo de paletas, como el que se muestra en la figura 1 se introduce en la corriente de un fluido, entonces el rotor del campo de velocidad $\vec{V}$ es una medida de la tendencia del fluido a hacer girar el dispositivo en torno a su eje vertical $\vec{\omega}$. Si $rot\vec{V} = 0$ se expresa entonces que la corriente del fluido es irrotacional, lo cual significa que está libre de vórtices o remolinos que causarían que las paletas giraran.

En la figura el eje w de los álabes apunta perpendicularmente hacia afuera de la página.

Fig.1

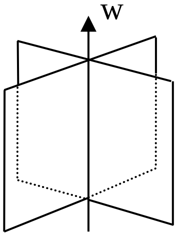
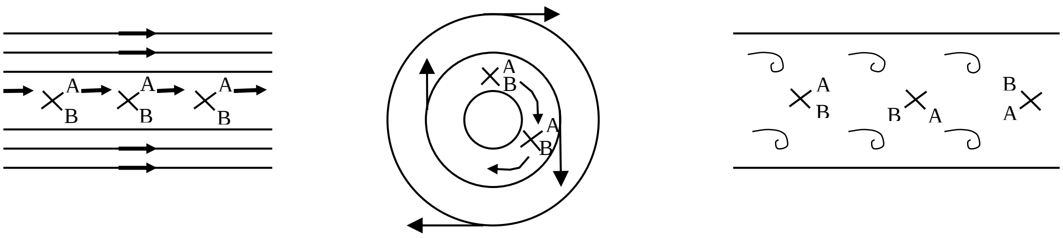


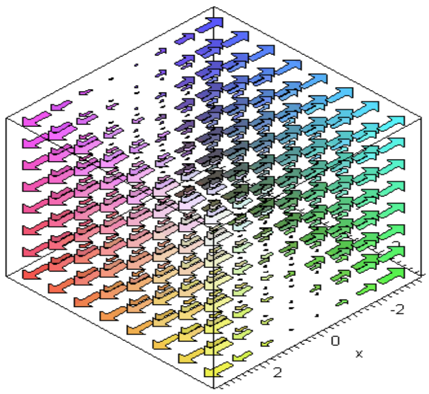
Fig.2



(a) corriente irrotacional

(b) corriente rotacional

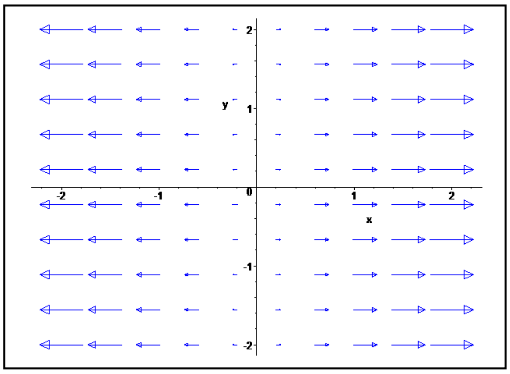
Ejemplo 1: El campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = x\bar{i}$ es un campo vectorial para el cual $\text{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$
Es campo irrotacional que se representa en la siguiente Figura.



Representación del campo vectorial

Se deja al lector que calcule analíticamente el valor del rotor del campo vectorial dado.

La Figura siguiente muestra una vista de este campo vectorial para un valor de z constante.



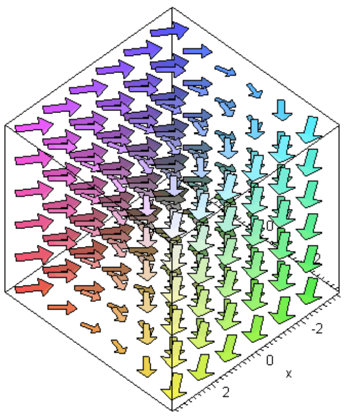
Representación del campo vectorial para z=0

Claramente se observa, que si esta es una corriente de fluido y los vectores señalan la distribución de velocidades a lo largo de líneas de corriente, una ruedita sumergida en este fluido no giraría, sólo sería arrastrada por la misma.

Ejemplo 2: Dado $\vec{F}(x,y,z) = y\,\bar{i} + 2\,\bar{j}$ un campo vectorial, $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = (0,0,-1)$. Es un campo vectorial que gira alrededor del eje z en sentido horario.

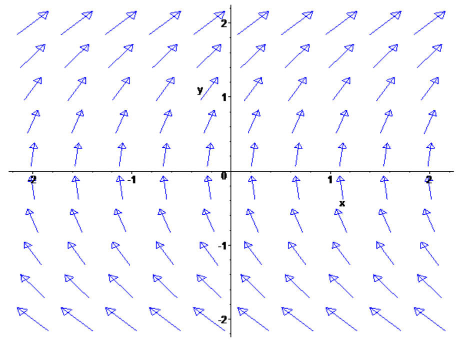
Se deja al lector que calcule analíticamente el valor del rotor del campo vectorial dado.

La Figura muestra una representación de este campo vectorial.



Representación del campo vectorial

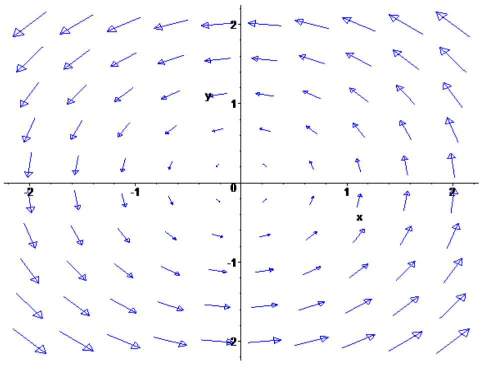
Si se logra una vista de este campo vectorial para un valor de z constante, como en la Figura que sigue, se ve que si esta es una corriente de fluido y los vectores señalan la distribución de velocidades a lo largo de líneas de corriente, una ruedita sumergida en este fluido girará en sentido negativo, es decir a favor de las agujas del reloj.



Representación del campo vectorial para z=0

Ejemplo 3: Dado $\vec{F}(x,y,z) = -y\bar{i} + x\bar{j}$ un campo vectorial, $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = (0,0,2)$.

Si se observa una vista de este campo vectorial para un valor de z constante, se ve que si esta es una corriente de fluido y los vectores señalan la distribución de velocidades a lo largo de líneas de corriente, una ruedita sumergida en este fluido girará en sentido positivo, es decir en contra de las agujas del reloj como se ve en la Figura que sigue.



Representación del campo vectorial para z=0

Se deja al lector que calcule analíticamente el valor del rotor del campo vectorial dado.