

Práctico de Integrales Múltiples

1. Escriba la expresión que permite calcular por integrales dobles:

(a) Área de una región plana R .

(b) Volumen de un sólido V de altura $z = f(x, y)$

(c) Masa total de una lámina R con densidad $\sigma(x, y)$.

(d) Determine si el enunciado es verdadero o falso y explique porque

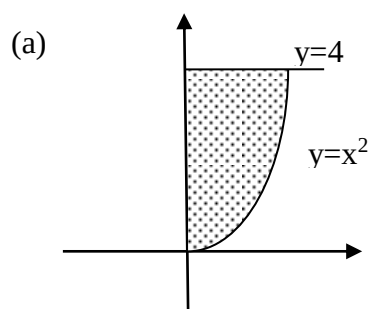
$$1. \int_{-1}^2 \int_0^6 x^2 \sin(x-y) dx dy = \int_0^6 \int_{-1}^2 x^2 \sin(x-y) dx dy =$$

2. En los siguientes apartados, grafique la región de integración R y plantee mediante integración iterada de dos formas distintas $\iint_R dx dy$.

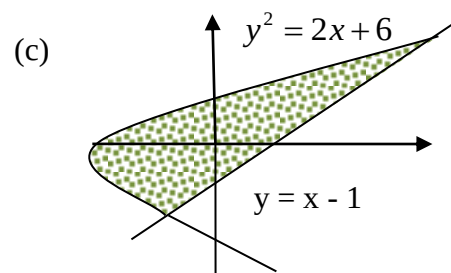
(a) $R: \begin{cases} y = x \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ (b) $R: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$

(c) $R: \begin{cases} y = 1 + x^2 \\ y = 2x^2 \end{cases}$ d) $R: \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 6 - y \end{cases}$

3. Calcule el área de las regiones siguientes:



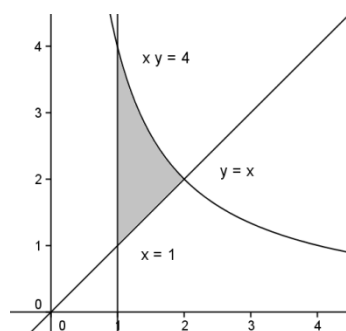
(b) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$



(d) $\begin{cases} y \leq \cos(x) \\ y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y \leq \ln x \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(f)



(g)

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4x - x^2 \end{cases}$

h) Una lámina ocupa el triángulo cuyos vértices son $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,2)$ y tiene densidad $\sigma = x^2 y$ en el punto (x,y) . Halle su masa.



Calcule el área de la región limitada por $y = 2x^2$ y $y = 1 + x^2$. Grafique la región.

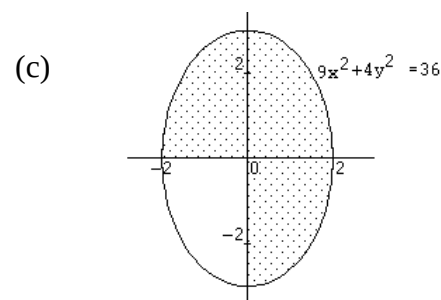
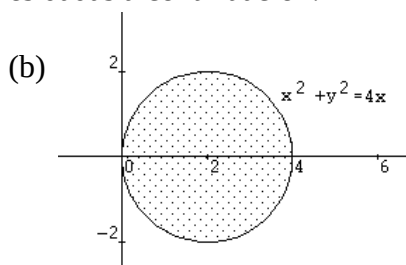


Calcule la masa de una lámina triangular de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(2,1)$. Su densidad en (x,y) es $\sigma = e^{y^2}$. Grafique la región.

4. (a) Indique analítica y gráficamente los cambios de coordenadas que puede realizar en el cálculo de áreas de regiones en $\mathbb{R}^2$ por integrales dobles.
- (b) Deduzca la expresión del Jacobiano.
- (c) Proporcione un ejemplo de región plana en el que utilice los cambios de coordenadas mencionados en el apartado (a).

5. Calcule el área de las regiones dadas a continuación:

(a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ y \geq 0 \end{cases}$



(d) $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$

(e) $\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 \leq 225 \\ x \geq 0 \end{cases}$

(f) $x^2 + y^2 \leq 8y$

(g) $\begin{cases} y \leq \sqrt{16 - x^2} \\ y \geq x \\ y \geq 0 \end{cases}$

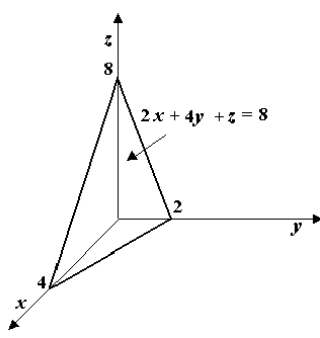


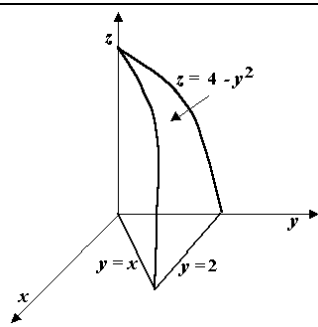
Considere la hoja cuadrada de un ventilador con lados de longitud 2 y el vértice inferior izquierdo colocado en el origen. Si la densidad de la hoja es $\rho(x,y) = 1 + 0,1x$ ¿Será más fácil hacer girar la hoja alrededor del eje x o alrededor del eje y ?

6. Escriba la expresión que permite calcular por integrales triples:

- (a) Volumen de un sólido.
- (b) Masa de un sólido con densidad $\tau(x,y,z)$.

7. Determine el volumen o la masa de los sólidos siguientes:

a) El volumen de 	b) La masa del sólido de densidad $\sigma(x,y) = 4$ limitado por : $\begin{cases} 3x + 6y + 4z = 12 \\ \text{planos coordenados} \end{cases}$
---	---

(c) La masa del sólido de densidad $\sigma(x, y) = x$, limitado por: $\begin{cases} z = 4 - x \\ y = 6 \\ \text{planos coordenados} \end{cases}$	d) El volumen del sólido de la figura 
--	--

8.

(a) Indique analítica y gráficamente los cambios de coordenadas que puede realizar en el cálculo de volúmenes de regiones en $\mathbb{R}^3$ por integrales triples.

(b) Deduzca la expresión del Jacobiano.

c) Determine si el enunciado es verdadero o falso, explique por qué:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^2 dz d\rho d\theta \text{ representa el volumen encerrado por el cono } z^2 = x^2 + y^2 \text{ y el plano } z = 2$$

9. Calcule el volumen de los sólidos definidos a continuación:

(a) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 9 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} z = 1 - y^2 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ z = 0 \end{cases}$

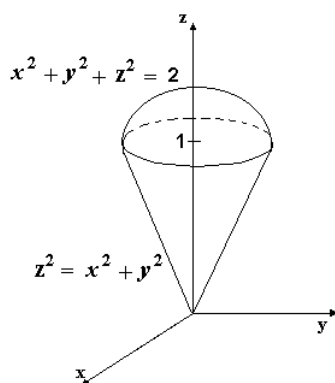
(c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 1 \leq z \leq 7 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} z = 10 - x^2 - y^2 \\ z = 1 \end{cases}$

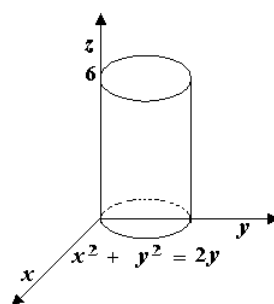
(e) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ z \geq 0 \end{cases}$

(g)



(h)



(i) $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$

Trace la gráfica del sólido limitado por el plano $x+y+z=1$ y el paraboloide $z=4-x^2-y^2$ y halle su volumen.

Halle el centro de masa de una lámina triangular con vértices (0,0), (1,0), y (0,2) si la función de densidad es $\rho(x,y)=1+3x+y$

Si la temperatura en un punto (x,y) de R, en el instante t es $3xy$, siendo R la región limitada por

$$y = x^2, x = 2, y = 0. \text{ Halle la temperatura promedio en R. } \text{valor medio} = \frac{\iiint_V f(x, y, z) dV}{\iiint_V dV}$$

Localice el centro de masa del sólido limitado por las gráficas de $y^2 + z^2 = 16$, $x = 0$, $x = 5$, si la densidad del punto (x,y) es directamente proporcional a la distancia al plano yz.

Instrucciones para resolver los ejercicios con el software MAPLE

Para trabajar con MAPLE y graficar regiones es necesario cargar el paquete gráfico:

>with(plots):

El cálculo de integrales dobles se realiza con los siguientes comandos:

>int(int(expresion, x = a..b), y= c..d);

siendo expresión= la función a integrar, en el caso de áreas planas es = a 1,

x=a..b límites inferior (a) y superior (b) de la variable x,

y=c..d límites inferior (c) y superior (d) de la variable y,

el orden de integración de las variables se puede conmutar.

Para visualizar la integral a resolver el comando es:

>Int(Int(expresion, x = a..b), y= c..d);

Para integrals triples los commando son:

>int(int(int(expresion, x = a..b), y= c..d) z=e..f);

>Int(Int(Int(expresion, x = a..b), y= c..d) z=e..f);

En coordenadas polares:

Graficar:

>plot(expresión, theta=a..b, coords=polar);

Siendo: theta = variable angular

a = ángulo inicial

b = ángulo final, por ejemplo 2π (2π)

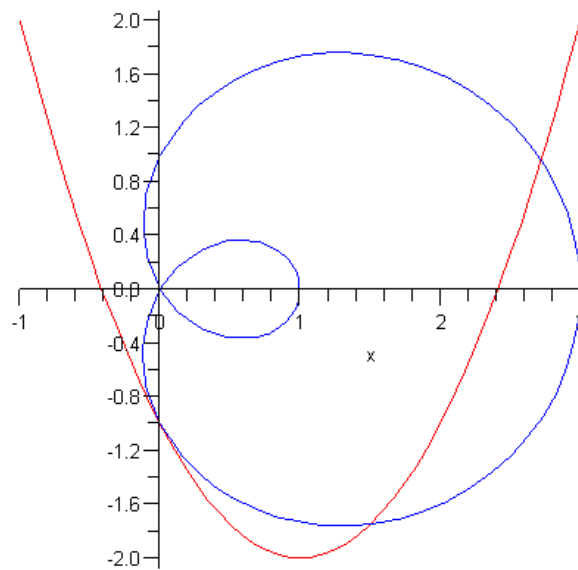
Se pueden graficar en una misma figura, la función en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares, considerando los ejes en las graduaciones correspondientes a cada sistema, como se muestra en el ejemplo:

>with (plots) ;

```

plota:= plot((x-1)^2-2, x=-1..3, color=red):
plotb:= plot(1+2*cos(theta), theta=0..2*Pi, coords=polar, color=blue):
display({plota, plotb});

```

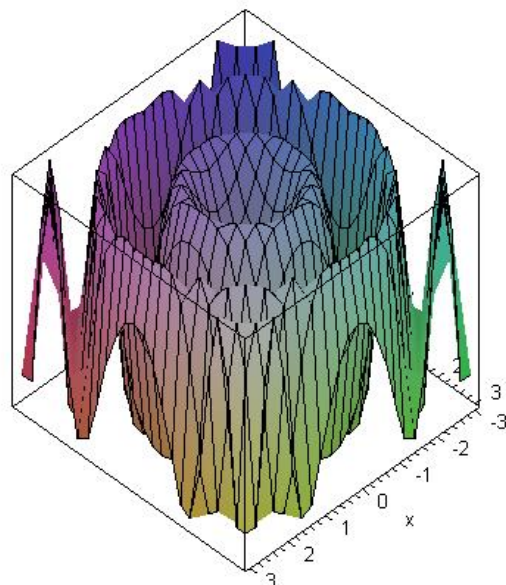


Graficar : $z = \sin(x^2 + y^2)$

```

> plot3d(sin(x^2+y^2), x=-3..3, y=-3..3, axes=boxed);

```



Integración en coordenadas polares: por ejemplo:

Integrar : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \rho d\rho d\theta$

```

> Int(Int(rho, rho=1..2), theta=pi/6..pi/3);

```

```

> int(int(rho, rho=1..2), theta=pi/6..pi/3);

```