Práctico de Integrales Curvilíneas

1. Escriba en forma paramétrica la ecuación de:

(a) Una recta en el plano

(b) Una recta en el espacio

(c) Una circunferencia

(d) Una elipse

2. (a) ¿Cuál es el concepto físico a partir del cual se define integral curvilínea para campos vectoriales?

(b) Indique la expresión que permite calcular $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$.

3. Calcule las integrales de línea de los campos siguientes:

(a) $\vec{F}(x,y) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$ a lo largo de la curva $C: x^2 + y^2 = 4$ recorrida en forma positiva desde (2,0) hasta (-2,0).

(b) $\vec{F}(x,y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + (xz - y)\,\bar{k}$ a lo largo del segmento de recta de extremos (0,0,0) y (1,2,4).

(c) $\vec{F}(x,y) = 2x\,\vec{i} + 3y\,\vec{j}$ a lo largo de la curva $C: 4x^2 + y^2 = 4$ recorrida en forma negativa desde (0,2) hasta (0,-2).

(d) $\bar{F} = y\,\bar{\imath} + x\,\bar{\jmath}$ a lo largo de la curva C : $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 3\,t^2 - 2 \end{cases}$ con $t \in [1, \frac{5}{3}]$

(e) $\int_C (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy$ a lo largo de la curva $C: y = x^2$ desde (-2,4) hasta (1,1).

(f) $\int_C 4x\, dx + (2y^2 - 3x)\, dy$ si la curva C consiste del segumto de recta desde (-3,-2) hasta (1,0) y del arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ desde (1,0) a (0,1), recorrida en sentido positivo.

4. (a) Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y) = (x+y)\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ siendo C la curva $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ $0 \le t \le 2$

(b) Un hombre que pesa 85 kg asciende por una escalera helicoidal. Da tres vueltas completas y transporta una lata de pintura de 10 kg. Si la ecuación de la escalera es $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,\mathrm{sen}\, t \\ z = 2t \end{cases}$. ¿Cuál es el trabajo que efectúa el hombre en contra de la gravedad para subir por la escalera?

5. (a) Complete: $\int_C f(x,y)\, ds = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(b) ¿Cuál es la interpretación física que puede darse al resultado anterior?

6. Calcule las integrales de línea con respecto a la longitud de arco dadas a continuación:

(a) $\int_C (x^2 + y^2)\, ds,\quad C: \quad y = \sqrt{4 - x^2}$ recorrida en sentido negativo.

(b) $\int_C x\, y^2 ds,\quad C: \quad x^2 + y^2 = 16$ entre los puntos (4,0) y (0,4).

(c) $\int_C (x+y)\, ds,$ $\quad C:$ el triángulo de vértices (0,0), (1,0) y (0,1) recorrido en el sentido negativo.

7. (a) ¿Cuáles son las consecuencias del Primer Teorema Fundamental de Integrales de Línea?

(b) ¿Para qué utiliza el Segundo Teorema Fundamental de Integrales de Línea?

(c) ¿Cuándo un campo vectorial es gradiente?

(d) ¿Cómo es el trabajo de un campo gradiente a lo largo de diferentes trayectorias entre dos puntos?

(e) ¿Cuánto vale el trabajo de un campo conservativo a lo largo de una trayectoria cerrada? Justifique su respuesta.

(f) Indique la expresión de las funciones potenciales de los campos siguientes y las condiciones que se deben cumplir:

(f.1) $\overrightarrow{F}(x, y)$

(f.2) $\overrightarrow{F}(x, y, z)$

8. Dado el campo $\overrightarrow{F}(x, y) = (2x + y^2 + 4)\ \vec{i}\ + (2xy + 4y - 5)\ \vec{j}$

(a) Determine si el campo es conservativo. En caso afirmativo, halle la función potencial.

(b) Calcule la integral del campo $\overrightarrow{F}$ a lo largo de:

(a.1) $C: y = x$ desde (0,0) hasta (1,1).

(a.2) $C: y = x^2$ desde (0,0) hasta (1,1).

(a.3) $C: x = y^3$ desde (0,0) hasta (1,1).

(c) Use el teorema correspondiente para resolver: $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \overrightarrow{F} \cdot d\vec{r}$.

(d) ¿Existirá otra trayectoria a lo largo de la cual la anterior integral también valga igual?

9. Dado el campo $\bar{F} = (2xy^2 - y^3)\bar{\imath} + (2x^2y - 3xy^2)\bar{\jmath}$

(a) Determine si el campo es conservativo. En caso afirmativo, halle la función potencial.

(b) Calcule $\int_{(-3,-1)}^{(1,2)} \bar{F}(x, y)\overline{dr}$.

10. Dado el campo $\overrightarrow{F}(x, y) = y\ \vec{i}\ + (x + z)\ \vec{j}\ + y\vec{k}$

(a) Determine si el campo es conservativo. En caso afirmativo, halle la función potencial.

(b) Calcule:

(b.1) $\int_{(0,1,1)}^{(1,1,1)} \overrightarrow{F} \cdot d\vec{r}$

(b.2) $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\vec{r}$, $\qquad C: x^2 + 5y^2 = 71$ en el plano $z = 1$.

11. Dada la función $f(x,y,z) = x^2 y - e^{xy} + 3z - 4$. Calcular $\int_{(0,-1,1)}^{(0,1,1)} \overrightarrow{\nabla f} \, . \, \overrightarrow{dr}$. Justifique.

Ejemplo: Determine si el campo es conservativo. En caso afirmativo, halle la función potencial para el campo:

a) $\vec{F}(x,y,z) = (y - z^2)\vec{i} + (x + 3z)\vec{j} + z\vec{k}$

```
> restart; with(plots):
> with(linalg):
```

Función potencial

```
> F:=(x,y,z)->[y-z**2,x+3*z,z];
```

$$F := (x, y, z) \rightarrow [y - z^2, x + 3z, z]$$

¿Es conservativo?

```
> potential(F(x,y,z),[x,y,z],'phi');
```

$$false$$

No es conservativo. La función potencial no existe.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (y)\vec{i} + (x)\vec{j} + z\vec{k}$, resolver $\int_{(1,2,3)}^{(0,0,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

```
> F:=(x,y,z)->[y,x,z];
```

$$F := (x, y, z) \rightarrow [y, x, z]$$

```
> potential(F(x,y,z),[x,y,z],'phi');
```

$$true$$

```
> phi;
```

$$y\,x + \frac{1}{2} z^2$$

```
>
```

Evaluar la F(x,y,z) entre los puntos (1,2,3) y (0,0,0)

```
> subs({x=1,y=2,z=3},phi)-subs({x=0,y=0,z=0},phi);
```

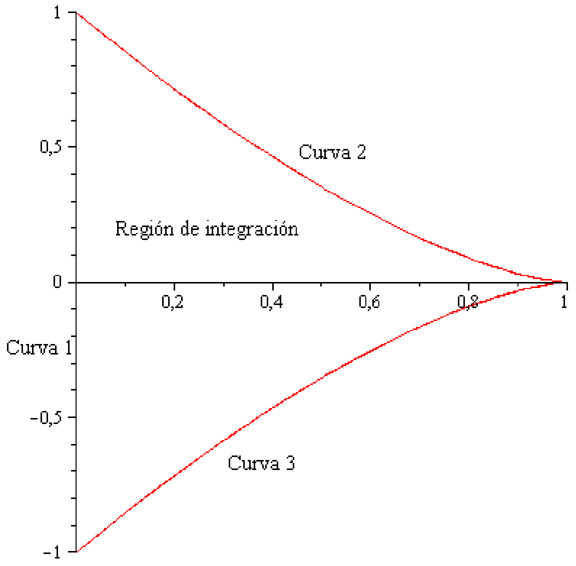
$$\frac{13}{2}$$

Ejemplo: Encontrar el trabajo realizado al circular la región cuya curva de borde esta limitada por el eje y , y por $\gamma(\theta) = [\cos(\theta)^2, \sin(\theta)^3]$, $\theta = 0..\pi$, siendo las componentes del campo vectorial P = x , Q = -y

```
> C := < cos(θ)^2, sin(θ)^3 >;
```

$$C := (\cos(\theta)^2) e_x + (\sin(\theta)^3) e_y$$

```
> with(plots) :
> plot([C[1], C[2], θ = 0..2·π]);
```



> $X := C[1]; Y := C[2];$

$$X := \cos(\theta)^2$$

$$Y := \sin(\theta)^3$$

> $dX := diff(C[1], \theta); dY := diff(C[2], \theta);$

$$dX := -2\cos(\theta)\sin(\theta)$$

$$dY := 3\sin(\theta)^2\cos(\theta)$$

> $int(X*dY - Y*dX, \theta = 0..2\cdot\pi);$

$$0$$

>

La integral da cero por la forma de la curva que al circular por ella, se está haciendo sobre dos curvas iguales y de sentido contrario por eso se anulan la integral. Podemos comprobarlo en:

> $int(X*dY - Y*dX, \theta = 0..\pi/2);$

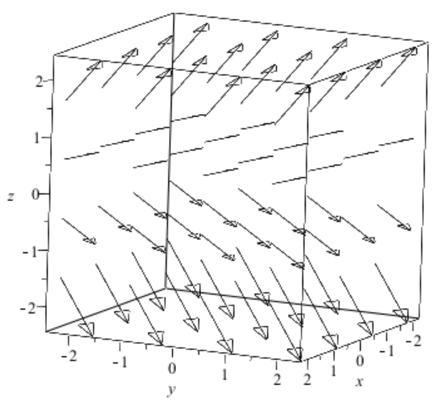
$$\frac{4}{5}$$

- ✓ Los software, como el Maple, son capaces de dibujar campos vectoriales en dos o tres dimensiones, proporcionando una mejor interpretación de estos campos.

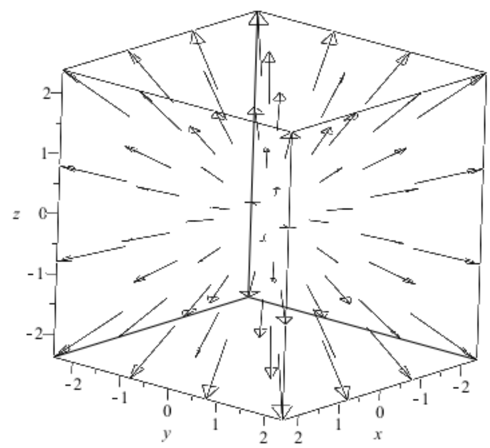
15- Busque la correspondencia entre los campos vectoriales $\bar{F}$ sobre $\mathbb{R}^3$ con las gráficas I a IV. Proporcione razones para su elección.

a- $\bar{F} = \bar{\imath} + 2\,\bar{\jmath} + 3\,\bar{k}$
b- $\bar{F} = \bar{\imath} + 2\,\bar{\jmath} + z\,\bar{k}$
c- $\bar{F} = x\,\bar{\imath} + y\,\bar{\jmath} + 3\,\bar{k}$
d- $\bar{F} = x\bar{\imath} + y\,\bar{\jmath} + z\,\bar{k}$

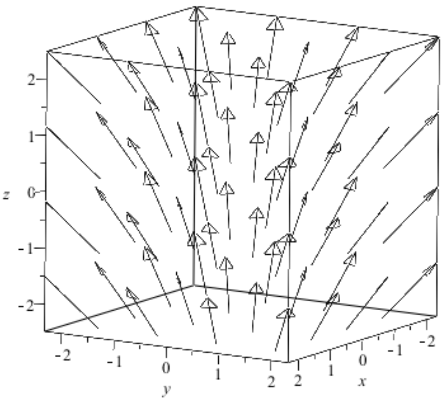
I



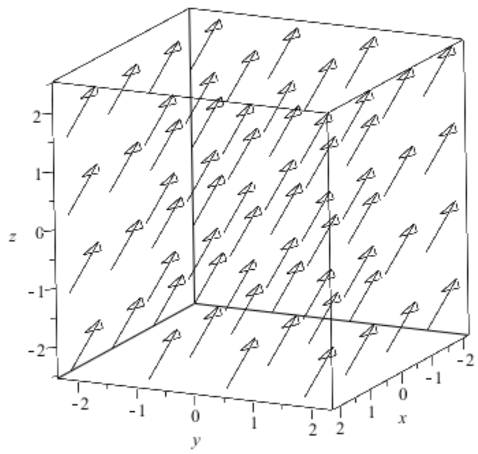
II



III



IV



Trace la grafica del campo vectorial en R^3 dado por $\bar{F}(x,y,z)=y\,\bar{i}+z\,\bar{j}+x\,\bar{k}$

Trace la gráfica del campo vectorial y de la trayectoria C del ejercicio 8 a.1 y a.2

Encuentre el campo gradiente de $f(x,y)=x^2\,y-y^3$. Trace la gráfica del campo vectorial gradiente junto con un mapa de curvas de nivel de f. ¿Cómo están relacionados?

Instrucciones para resolver los ejercicios con el software MAPLE

Se necesita para operar con el software las librerías de Algebra lineal y Cálculo vectorial, que se cargan como sigue:
with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):

campo vectoriales:
```
> F := VectorField(<componente 1, componente 2, componente 3>, 'cartesian'[x,y,z]);
> fieldplot3d(F, x=-a..b, y=c..d, z=e..f, color=red, grid=[4, 4, 4], arrows=SLIM):
```

Para calcular el **producto escalar** entre dos vectores se usa el comando:

DotProduct(**v1**, **v2**) , v1= vector 1, v2 = vector 2