

Práctico de Integrales – Teoremas Fundamentales

1. (a) Indique hipótesis y tesis del Teorema de Green.
 (b) ¿Qué tipo de integrales relaciona?
 (c) ¿Puede aplicar el teorema de Green si la curva es abierta? Justifique su respuesta.

2. Calcule las integrales curvilíneas aplicando el Teorema de Green:

- (a) $\vec{F}(x, y) = 4y \vec{i} + 3x \vec{j}$,
 C : cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$.
- (b) $\vec{F}(x, y) = (x - y) \vec{i} + (x^2 + y) \vec{j}$,
 C : frontera de la región $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
- (c) $\oint_C (x^2 - y^2) dx + (2y - x) dy$,
 C : frontera de la región limitada por $y = x^2$, $y = x^3$.

3. Calcule las integrales de línea de los campos dados a continuación:

- (a) $\vec{F}(x, y) = (x - y) \vec{i} + 3xy \vec{j}$
 C : segmento que une los puntos $(2,1)$ y $(3,5)$
- (b) $\vec{F}(x, y) = y^2 \vec{i} + x^2 \vec{j}$
 C : frontera de la región limitada por el eje x , $x = 1$, $y = x^2$
- (c) $\vec{F}(x, y) = \sin(y) \vec{i} + (\sin y + x \cos(y)) \vec{j}$
 C : $x^2 + y^2 = 16$
- (d) $\vec{F}(x, y) = 2xy \vec{i} - x^2 y \vec{j}$,
 C : triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

 Aplicar el teorema de Green para calcular el trabajo total realizado al mover un objeto en el sentido contrario al giro de las agujas del reloj sobre la elipse de semiejes a y b si el movimiento es causado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = \frac{x}{2} \vec{i} + \frac{y}{2} \vec{j}$

4. (a) Indique hipótesis y tesis del Teorema de Gauss o de la divergencia.
 (b) ¿Qué tipo de integrales relaciona?
 (c) ¿Qué establece este teorema?
 (d) ¿A qué tipo de superficies se aplica?

5. Calcular el flujo de los campos siguientes a través de las superficies indicadas:

(a) $\vec{F}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + 2xy \vec{j} + z \vec{k}$, S : Limitada por $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano xy

(b) $\vec{F}(x, y, z) = yz \vec{j}$, S : Limitada por $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $z = 1$ y $z = 4$.

(c) $\vec{F}(x, y, z) = (2x - y) \vec{i} - (2y - z) \vec{j} + z \vec{k}$,

S : Limitada por $2x + 4y + 2z = 12$ y los planos coordenados.

(d) $\vec{F}(x, y, z) = xy \vec{i} + yz \vec{j} + zx \vec{k}$,

S : Limitada por $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$

6. (a) Indique hipótesis y tesis del Teorema de Stokes.

(b) ¿Qué tipo de integrales relaciona?

(c) ¿Qué establece este teorema?

(d) ¿A qué tipo de superficies se aplica?

7. Determine el flujo del rotor de los campos siguientes a través de las superficies indicadas:

(a) $\vec{F}(x, y, z) = z^2 \vec{i} + y \vec{j} + xz \vec{k}$, S : $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = -yz \vec{i} + xz \vec{j} + z \vec{k}$, S : $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$.

(c) $\vec{F}(x, y, z) = x^2 y^3 \vec{i} + \sin(xyz) \vec{j} + xy z \vec{k}$, S es la parte del cono $y^2 = x^2 + z^2$ que está entre los planos $y = 0$ e $y = 3$.

(d) $\vec{F}(x, y, z) = x \vec{i} + y \vec{j} + xy z \vec{k}$, S es la parte del plano $2x + y + z = 2$ que se encuentra en el primer octante. En este caso ¿cuál es el lado de la igual más conveniente a aplicar? ¿Por qué?

(e) $\vec{F}(x, y, z) = 2xz \vec{i} + 4xz \vec{j} + 4z \vec{k}$ a través de la superficie S : $z = x^2 + y^2$ con $0 \leq z < 4$



Encontrar el flujo del campo $F = [x, y, z]$ que atraviesa la superficie de una esfera de radio R

La esfera se introduce en coordenadas esféricas. Grafique, para lo cual adopte el radio de la esfera igual a 2.

> **restart : with(plots): with(LinearAlgebra): with(VectorCalculus):**

> **$V := \langle r \cos(\phi) \cos(\theta), r \cos(\phi) \sin(\theta), r \sin(\phi) \rangle;$**

$$V := (r \cos(\phi) \cos(\theta))e_x + (r \cos(\phi) \sin(\theta))e_y + (r \sin(\phi))e_z$$

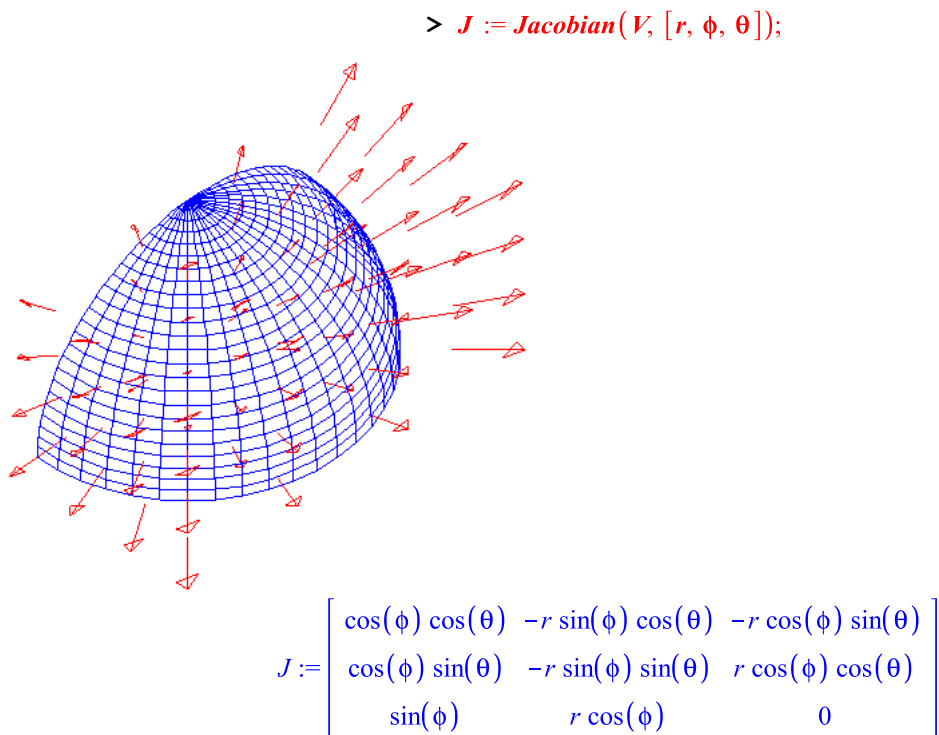
> **$F := \text{VectorField}(\langle x, y, z \rangle, 'cartesian'[x, y, z]);$**

$$F := (x)e_x + (y)e_y + (z)e_z$$

para graficar doy valor 2 al radio.

```
> S := subs(r = 2, V);
      S := 2 cos(φ) cos(θ)ex + 2 cos(φ) sin(θ)ey + 2 sin(φ)ez
> P1 := fieldplot3d(F, x=-2..2, y=0..2, z=0..2, color=red, grid=[4, 4, 4], arrows=SLIM);
> P2 := plot3d(S, θ = 0 .. π, φ = 0 .. π/2, color = blue, style
      = wireframe );
> display (P1, P2, scaling = constrained) ;
```

La grafica que se obtiene es:



```
> V1 := abs(simplify(Determinant(Transpose(J)))) assuming real ;
```

$$V1 := r^2 |\cos(\phi)|$$

```
> divF := Divergence(F, [x, y, z]);
```

$$\text{div}F := 3$$

```
> Int(Int(Int(divF*V1, r = 0 .. R), φ = 0 .. π/2), θ = 0 .. π);
```

$$\int_0^\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^R 3 r^2 |\cos(\phi)| dr d\phi d\theta$$

```
> simplify(4*value(%), symbolic);
```

$$4 R^3 \pi$$



Aplicar el Teorema de Stokes para encontrar el flujo del rotor de $F = (x + y)^3 i - (x - y)^3 j + z^3 k$ a lo largo de la curva C, que es la intersección del cilindro de ecuación $[2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), z]$ y el plano $x + y + 2z = 2$.

En primer lugar graficamos las superficies y el campo vectorial.

```

> restart: with(plots): with(LinearAlgebra):with(VectorCalculus):
> S := <2*cos(theta), 2*sin(theta), z>;

$$S := 2 \cos(\theta) e_x + 2 \sin(\theta) e_y + (z) e_z$$

> P1 := plot3d(S, theta=0..2*Pi, z=-6..6, color=blue, style=wireframe, grid=[40,40]):
> P := <x, y, 1-x/2-y/2>;

$$P := (x) e_x + (y) e_y + \left(1 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} y\right) e_z$$

> P2 := plot3d(P, x=-4..4, y=-4..4, color=pink, style=patchnogrid):
> F := VectorField(<(x+y)^3, -(x-y)^3, z^3>, 'cartesian'[x, y, z]);

$$F := ((x+y)^3) \bar{e}_x - (x-y)^3 \bar{e}_y + (z^3) \bar{e}_z$$

> P3 := fieldplot3d(F, x=-4..4, y=-4..4, z=-6..6, color=black, arrows=SLIM, grid=[5, 5, 5]):
> display(P1, P2, P3, axes=framed, labels=[x, y, z]);

```

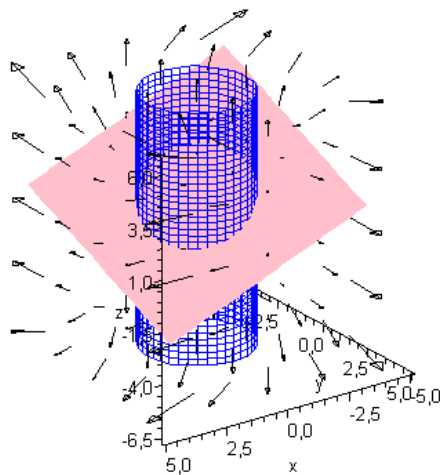
Calcularemos el rotor de F

```
> rotF := Curl( F );
```

$$\text{rot} F := 0 \bar{e}_x + 0 \bar{e}_y + (-3(x-y)^2 - 3(x+y)^2) \bar{e}_z$$

Encontrar el vector normal al plano

```
> dP[x] := diff(P, x);
```



$$dP_x := e_x + 0e_y + \left(\frac{-1}{2}\right) e_z$$

```
> dP[y] := diff(P, y);
```

$$dP_y := 0e_x + e_y + \left(\frac{-1}{2}\right) e_z$$

```
> N := dP[x] &x dP[y];
```

$$N := \left(\frac{1}{2}\right) e_x + \left(\frac{1}{2}\right) e_y + e_z$$

Hay que fijarse si es consistente con la dirección positiva del plano

```
> n := Normalize(N, 2);
```

$$n := \frac{1}{6} \sqrt{6} e_x + \frac{1}{6} \sqrt{6} e_y + \frac{1}{3} \sqrt{6} e_z$$

Realizar el producto de (rot F) . n

```
> rotFn := evalVF(rotF, <x, y, z>).n;
```

$$\text{rot} F n := \frac{1}{3} (-3(x-y)^2 - 3(x+y)^2) \sqrt{6}$$

El del cilindro:

```
> C := <rho*cos(theta), rho*sin(theta)>;
```

$$C := (\rho \cos(\theta)) e_x + (\rho \sin(\theta)) e_y$$

```
> J := Jacobian(C, [rho, theta]);
```

$$J := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

> **J1 := simplify(Determinant(J));**

$$J1 := \rho$$

Cambio de coordenadas de rot F

> **rotFn := subs({x=S[1], y=S[2], z=S[3]}, rotFn);**

$$\text{rotFn} := \frac{1}{3} \left(-3 (2 \cos(\theta) - 2 \sin(\theta))^2 - 3 (2 \cos(\theta) + 2 \sin(\theta))^2 \right) \sqrt{6}$$

> **Int(Int(rotFn*J1, rho=0..2), theta=0..2*Pi);**

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{1}{3} \left(-3 (2 \cos(\theta) - 2 \sin(\theta))^2 - 3 (2 \cos(\theta) + 2 \sin(\theta))^2 \right) \sqrt{6} \rho \, d\rho \, d\theta$$

> **value(%);**

$$-32 \pi \sqrt{6}$$



Evaluar la integral de línea de $F = y^2 i + x^2 j + z^2 k$ a lo largo de la curva formada por la intersección del paraboloide $z = 2x^2 + 3y^2$, y el plano $z = 3y + 5x + 2$.

La gráfica que se obtiene es:

