Se estudiaran tres teoremas muy importantes en el Cálculo, ya que relacionan los distintos tipos de integrales, ya vistas y facilitan su cálculo.

1. Teorema de Green

El Teorema de Green es muy útil porque relaciona una integral de línea a lo largo de la frontera de una región con una integral de área sobre el interior de la región, y en muchos casos será más fácil evaluar la integral de línea que la integral de área.
Este teorema debe ser considerado como el similar del 2° Teorema fundamental del cálculo (Regla de Barrow), para el caso de integrales dobles.

> Sean $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ un campo vectorial con derivadas parciales primeras continuas en un conjunto simplemente conexo D del plano xy. Sea C una curva de Jordan (regular a trozos), y se representa por R la región que encierra C y su interior. Se supone que R esta contenida en D. Se tiene entonces la identidad:
> $$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

La integral de línea se toma alrededor de C en sentido contrario al de las agujas del reloj.

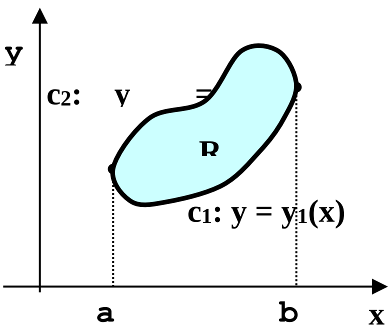
Demostración:

La identidad que se quiere demostrar es equivalente a las fórmulas:

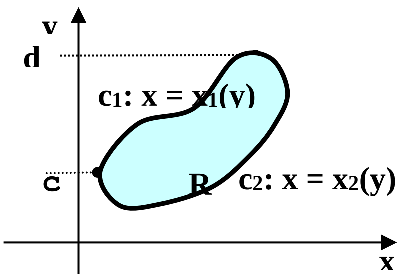
$$\iint_R Q_x\,dx\,dy = \oint_C Q\,dy \qquad (1) \qquad\qquad -\iint_R P_Y\,dx\,dy = \oint_C P\,dx \qquad (2)$$

ya que sumando (1) y (2) se la obtiene.

Sea R la región que se indica en el gráfico:



R es verticalmente simple



R es horizontalmente simple

$R=\{(x,y)\,/\,a\le x\le b \text{ y } y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son continuas en [a,b] , siendo $y_1(x) \le y_2(x)$.

Se calcula la integral doble $-\iint_R P_y\,dx\,dy$, integrando primero respecto a y (y variable dependiente):

$$-\iint_R P_y\,dx\,dy = -\int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} P_y\,dy\,dx = -\left[\int_a^b [P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x))]\,dx\right]$$

$$=\int_a^b P[x,y_1(x)]\,dx+\int_b^a P[x,y_2(x)]\,dx \qquad (3)$$

Por otra parte la integral de línea $\int_C P\,dx=\int_{C_1} P\,dx+\int_{C_2} P\,dx$

Para calcular la integral a lo largo de C_1 utilizamos la representación paramétrica $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+y_1(t)\,\vec{j}$, obteniendo:

$$\int_{C_1} P\,dx=\int_a^b P[t,y_1(t)]\,dt$$

Para calcular la integral a lo largo de C_2 empleamos la representación paramétrica $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+y_2(t)\,\vec{j}$ y tenemos en cuenta la inversión del sentido, obteniendo:

$$\int_{C_2} P\,dx = -\int_a^b P[t,y_2(t)]\,dt=\int_b^a P[t,y_2(t)]\,dt$$

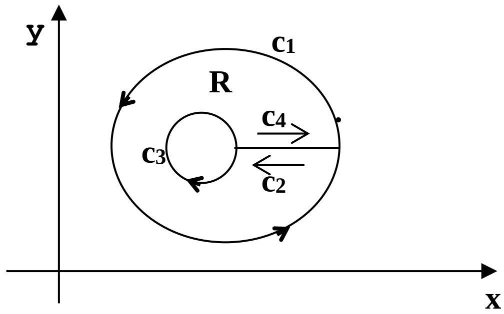
Por lo tanto:

$$\int_C P\,dx=\int_a^b P[t,y_1(t)]\,dt-\int_a^b P[t,y_2(t)]\,dt=\int_a^b P[t,y_1(t)]\,dt+\int_b^a P[t,y_2(t)]\,dt$$

Comparando esta fórmula con (3) obtenemos (1).

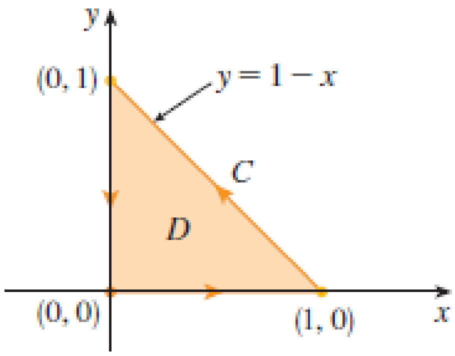
Nota: También se demuestra el teorema para regiones R que puedan descomponerse en un número finito de regiones como se indica en la gráfica, se aplica el teorema a cada subregión, y se suman los resultados. Las integrales a lo largo de los cortes se reducen a pares y la suma de las integrales de línea a lo largo de las fronteras de las subregiones es igual a la integral de línea a lo largo de la frontera de R.

$$\int_C \overline{F}\cdot d\bar{r} = \int_{C_1} \overline{F}\cdot d\bar{r} + \int_{C_2} \overline{F}\cdot d\bar{r} + \int_{C_3} \overline{F}\cdot d\bar{r} + \int_{C_4} \overline{F}\cdot d\bar{r} = \int_{C_1} \overline{F}\cdot d\bar{r} + \int_{C_3} \overline{F}\cdot d\bar{r}$$



Ejemplo: Evalúe $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, donde C es la curva triangular formada por los segmentos rectilíneos de (0, 0) a (1, 0), de (1, 0) a (0, 1) y de (0, 1) a (0, 0).

SOLUCIÓN: Aunque la integral de línea dada se podría evaluar como se acostumbra, eso significaría plantear tres integrales separadas a lo largo de los tres lados del triángulo, de modo que en lugar de eso aplicaremos el teorema de Green. Observe que la región D encerrada por C es simple y C sigue una orientación positiva.



Si hacemos P(x, y) = x^4 y Q(x, y)= xy, entonces tenemos

$$\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1 - x)^2\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{6}(1 - x)^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{6}$$

Se observa que resolver aplicando la integral doble sobre R es más sencillo que la resolución por medio de las integrales de línea.

El Teorema se puede utilizar para explicar cómo funcionan los planímetros. Un planímetro es un instrumento mecánico que se emplea para medir el área de una región al trazar su curva frontera. Estos aparatos son útiles en todas las ciencias: en biología para medir el área de hojas o alas, en medicina para medir el tamaño de secciones transversales de órganos o tumores, en bosques para estimar el tamaño de regiones pobladas de árboles a partir de fotografías.

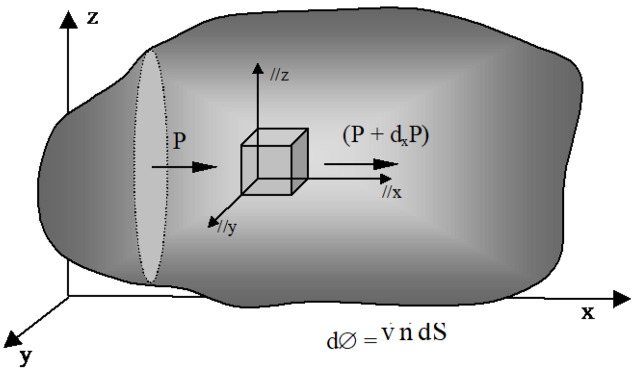
La figura muestra la operación de un planímetro polar: el polo se fija y, cuando el trazador se mueve a lo largo de la curva frontera de la región, la rueda se desliza parcialmente y rueda también parcialmente en forma perpendicular al brazo trazador. El planímetro mide la distancia que la rueda gira y ésta es proporcional al área encerrada. La explicación como una consecuencia del teorema se puede hallar en los siguientes artículos:

■ R. W. Gatterman, "The planimeter as an example of Green's Theorem", Amer. Math. Monthly, vol. 88 (1981), pp. 701-704.

■ Tanya Leise, "As the planimeter wheel turns", College Math, Journal, vol. 38. (2007), pp. 24-31.

2. Teorema de Gauss o de la divergencia

Sea $\Re$ una región sólida limitada por una superficie cerrada S cuyo vector normal unitario $\vec{n}$ está dirigido al exterior de S. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en $\Re$ entonces $\iint\limits_{S} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint\limits_{\Re} (div\vec{F})dxdydz$



Demostración:

Para encontrar la variación total del flujo ($d\Phi$) a través de un volumen elemental, primero encontramos la variación del flujo en cada una de las direcciones x,y,z.
Consideramos un sólido dentro de un campo vectorial, del cual tomamos una porción elemental.
Sea $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$

Se verá con detalle la variación de flujo en una dirección paralela al eje x, las otras direcciones se hacen por analogía.
En el volumen elemental dx dy dz , en la dirección del eje x, el flujo entrante es : P dy dz , el saliente en la misma dirección por la cara opuesta, habiendo variado la magnitud del vector, debido al desplazamiento infinitesimal, es (P + d_x P) dy dz (d_x es la notación para indicar el diferencial en la dirección del eje x) y el flujo resultante a través de las dos caras paralelas resulta :

$$d_x\Phi = (P + d_x P)\,dy\,dz - P\,dy\,dz = d_xP\,dy\,dz$$

Como se considera una paralela al eje tenemos y = cte, z = cte. y el diferencial de
$P = P(x,y,z)$ es

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz = \frac{\partial P}{\partial x}dx = d_xP$$

Así el diferencial de flujo en la dirección de x

$$d_x\Phi = d_xP\,dy\,dz = \frac{\partial P}{\partial x}dx\,dy\,dz = \frac{\partial P}{\partial x}dV \qquad (dV = \text{diferencial volumen})$$

Haciendo lo mismo en la dirección del eje z, x = cte, y = cte obtenemos

$$dR = \frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz = \frac{\partial R}{\partial z}dz = d_zR$$

Es el diferencial de flujo en la dirección de z

$$d_z\Phi = (R + d_zR)\,dx\,dy - R\,dx\,dy = d_zR\,dx\,dy = \frac{\partial R}{\partial z}dx\,dy\,dz = \frac{\partial R}{\partial z}dV$$

Por analogía en la dirección de y, x = cte , z = cte se obtiene:

$$d_y\Phi = \frac{\partial Q}{\partial y}dV$$

Luego la variación total de flujo en un diferencial de volumen es:

$$d\phi = d_x\phi + d_y\phi + d_z\phi = \left(\frac{\partial\ P}{\partial\ x} + \frac{\partial\ Q}{\partial\ y} + \frac{\partial\ R}{\partial\ z} \right)\ dV$$

$$d\phi = \left(\frac{\partial}{\partial\ x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial\ y}\ \vec{j} + \frac{\partial}{\partial\ z}\vec{k} \right) \left(P\,\vec{i} + Q\ \ \vec{j} + R\ \ \vec{k}\right) dV$$

por la definición de divergencia dicha variación se puede expresar como

$$d\Phi\ =\ \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\ dV =\ div\ \vec{F}\ dV$$

Luego de sumar estos diferenciales de flujo y tomando límite cuando ΔV tiende a cero obtenemos

$$\Phi = \iiint_R \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\ \ dV \qquad \textbf{[1]}$$

Además por definición $\Phi\ = \iint_S\ \vec{F}\ \cdot\ \vec{n}\ \ dS$ **[2]**

igualando [1] y [2] obtenemos:

$$\iiint_R (\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,)\ dV = \iint_S\ \vec{F}\cdot\vec{n}\ \ dS$$

igualdad que también se puede expresar como

$$\iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \iint_S\ \vec{F}\cdot\vec{n}\ \ dS \qquad \textbf{c.q.d.}$$

Consideraciones importantes:

- La superficie S debe ser cerrada en el sentido de que forma una frontera completa del sólido $\Re$
- El teorema de la divergencia establece que el flujo de un vector $\vec{\mathrm{F}}$, que emana a través de una superficie S que rodea al sólido $\Re$ es igual a la divergencia total del vector $\vec{\mathrm{F}}$ en el sólido $\Re$ encerrado por la superficie S.
- El teorema de la Gauss expresa una relación entre integral triple extendida a un sólido y una integral de superficie tomada sobre la frontera de ese sólido.

Ejercicio: Indique: a) la relación entre S y $\Re$. Grafique.
b) Qué tipo de integrales relaciona el teorema de Gauss?

Ejemplo:

Dado $\vec{F} = x\,\vec{i} + y\ \vec{j} + z\,\vec{k}$ calcular el flujo Φ a través de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$$\Phi = \iiint_R (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\ dV = \iiint_R \left(\frac{\partial\ P}{\partial\, x} + \frac{\partial\ Q}{\partial\ y} + \frac{\partial\ R}{\partial\, z} \right)\ dx\ \ dy\ \ dz$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial R}{\partial z}=1$$

$$\Phi = \iiint 3dxdydz = 3\frac{4}{3}\pi a^3 \rightarrow \qquad \Phi = 4\pi a^3$$

!Por qué se puede utilizar el Teorema de Gauss o divergencia?

Si se calcula utilizando la definición: $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS$

$$\vec{F}\cdot\vec{n} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\cdot\left(\frac{x}{a}\vec{i} + \frac{y}{a}\vec{j} + \frac{z}{a}\vec{k}\right) = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a$$

$$\vec{F}\cdot\vec{n}\cdot dS = a\cdot\frac{a}{z}dxdy = \frac{a^2}{z}dxdy$$

$$\frac{\Phi}{2} = \iint_T \frac{a^2}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}dxdy$$

Usando coordenadas polares se llega a $\frac{\Phi}{2} = 2a^3\pi \quad \rightarrow \qquad \Phi = 4a^3\pi$

! Queda para el alumno graficar las regiones S y T.

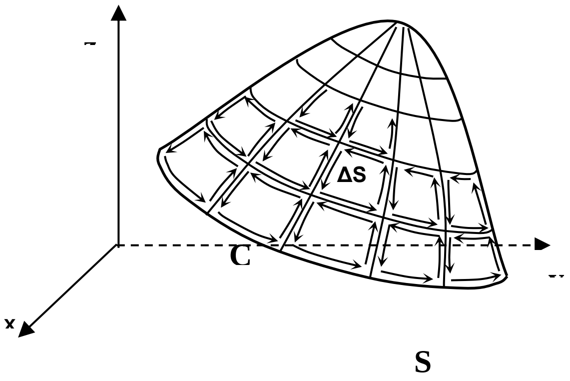
3. Teorema de Stokes

Sea *S* una superficie con vector normal unitario $\vec{n}$ dirigido al exterior, cuyo contorno es una curva cerrada simple C, suave a trozos. Si $\vec{V}$ es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta $\Re$ que contiene *S* y *C*, entonces: $\oint_C \vec{V}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{V})\cdot\vec{n}dS$

Demostración:

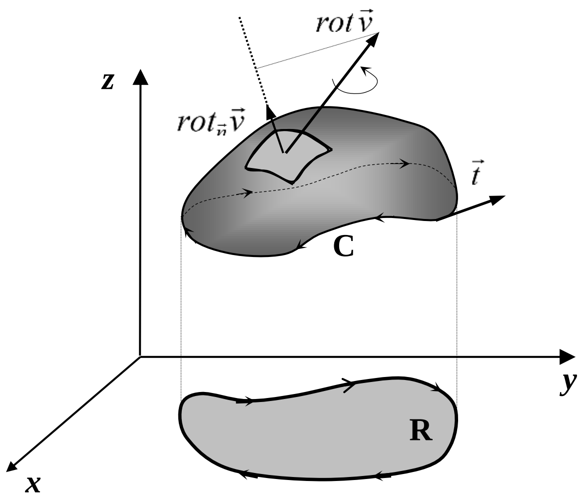
En cada malla de la superficie se toma un punto P_k interior cualquiera

$$(rot_{\vec{n}}\,\vec{V}\,)_{P_k} = \lim_{\Delta S_k \to 0} \frac{\oint_{C_k} \vec{V}\cdot d\vec{r}}{\Delta S_k}$$



$$(rot_{\vec{n}}\,\vec{V}\,)_{P_k} = \frac{\oint_{C_k} \vec{V}\cdot d\vec{r}}{\Delta S_k} + \varepsilon_k$$

$$(rot_{\vec{n}}\,\vec{V}\,)_{P_k} \cdot \Delta S_k = \oint_{C_k} \vec{V}\cdot d\vec{r} + \varepsilon_k \;\; \Delta S_k$$



Sumando todas las mallas

$$\sum_{k=1}^{n} (rot_{\vec{n}}\,\vec{V}\,)_{P_k} \cdot \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} \vec{V}\cdot d\vec{r} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \;\; \Delta S_k$$

Se considera la norma de la partición $N(P)$ = máx $\{\delta_k\} = \delta$, siendo δ_k el diámetro de cada ΔS_k.

Pasando al límite cuando $N(P)$ tiende a cero, y teniendo en cuenta que la suma de las circulaciones sobre los C_k es simplemente la circulación a lo largo de C, pues las integrales sobre los arcos comunes a dos ΔS_k, se anulan mutuamente al tomarse dos veces en sentidos contrarios, y que $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \;\; \Delta S_k$ es un infinitésimo, resulta

$$\iint_S rot_{\vec{n}}\,\vec{V}\;\; dS \;=\; \oint_C \vec{V}\cdot d\vec{r} \qquad \textbf{c.q.d.}$$

Consideraciones importantes:

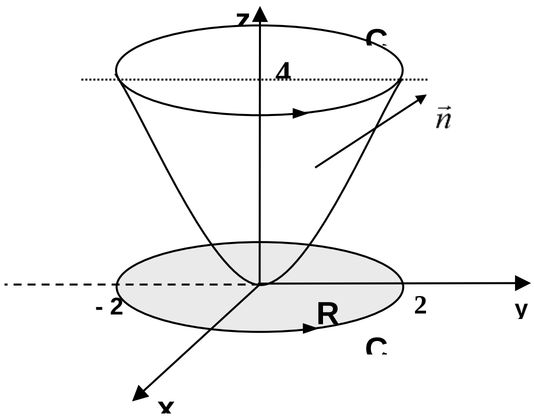
- El teorema de Stokes es una extensión del teorema de Green al espacio, relaciona una integral de superficie con una integral de línea.
- El teorema de Stokes establece que la circulación a lo largo de una curva simple cerrada es igual al flujo del rotor a través de una superficie abierta cualquiera que la tenga por borde.
- Se aplica solamente a superficies abiertas.(Se trabaja sobre la curva de contorno C).

- El teorema de la Stokes expresa una relación entre integral de línea definida sobre la curva de contorno de un sólido abierto y una integral de superficie tomada sobre la frontera del mismo.

Para una mejor comprensión, ver interpretación física del fenómeno en la bibliografía.

Ejercicio: Indique: a) la relación entre S y C. Grafique.
b) Qué tipo de integrales relaciona el teorema de Stokes?

Ejemplo: Calcular el flujo del rotor de $\vec{V} = x\ \vec{i} + 4\ \vec{j} + y^2\ \vec{k}$ a través de la superficie $z = x^2 + y^2$, de altura z = 4.



Solución:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n}\ dS = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{para} \quad z = 4$$

$$4 = x^2 + y^2$$

$$\nabla \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & 4 & y^2 \end{vmatrix} = 2y\,\vec{i}$$

$$\vec{n} = \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 1\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \quad ; \quad cos(\vec{n}, z) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n} = (2\ y\ \vec{i}) \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n}\ dS = \iint_T \frac{-4\,x\,y}{4x^2 + 4y^2 + 1} (4x^2 + 4y^2 + 1)\, dx\ dy \qquad (1)$$

! Queda para el alumno graficar S y T. En qué espacio está cada una?

Utilizando coordenadas polares: $\begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sen\theta \end{cases}$; $J = \rho$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{3} -4\,\rho^3\ cos\theta\quad sen\theta\, d\rho\ d\theta = 0$$

Si se calcula utilizando el Teorema de Stokes, se tiene:

$$\oint_C \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} x\ dx\ +\ 4\ dy\ +\ y^2\ \ dz$$

$$\begin{cases} x = 2cost \\ y = 2\, sent \\ z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = -2sent\, dt \\ dy = 2\, cost\, dt \\ dz = 0 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\,\pi$$

$$\int_C \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-4cost\ \ sent\ +\ 8\ \ cost\,)\ dt = 0$$

Se ve la conveniencia del uso de $\oint_C \vec{V}\cdot d\vec{r}$ para calcular el flujo del rotor, cuando se puede utilizar el teorema de Stokes.