UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN

Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemática

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

CÁLCULO II

ALIMENTOS – QUIMICA – INDUSTRIAL

CURSO: SEGUNDO AÑO

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Equipo de cátedra:

Mg. Ing. Patricia Cuadros

Dra. Bioing. Lorena Orosco

Ing. Nicolás Sardiña

Año 2021

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

1. INTRODUCCION

Vamos a saltar de ese mundo en 2-D al mundo 3-D en el que todos vivimos y respiramos. En lugar de funciones de x que pueden visualizarse como líneas, podemos tener funciones de x e y que pueden visualizarse como superficies. Pero, ¿la idea de derivada todavía tiene sentido? ¡Por supuesto que sí! Siempre que se especifique en qué dirección va.
Los conceptos que se estudian en cálculo vectorial, tales como el gradiente, divergencia y rotor, son muy importante para el estudio de la mecánica y electromagnetismo.
Vemos todos los días fenómenos que involucran estos tres conceptos, por ejemplo, cuando llueve y una gota se desliza por el vidrio, esta sigue la trayectoria más fácil de recorrer; y es así que en este sencillo ejemplo podemos observar que el gradiente se hace presente.
El uso del cálculo multivariable en áreas tan importantes como el electromagnetismo genera mayor conocimiento sobre cómo se comportan las cosas alrededor, también como crear nuevos productos que realicen una función deseada; es necesario tener conocimiento sobre los fenómenos que generan energía.
Las funciones de dos o más variables independientes se presentan con más frecuencia en la ciencia que las funciones de una sola variable, siendo su cálculo aún más complejo. Sus derivadas son más variadas e interesantes debido a la forma en que interactúan sus variables. Sus integrales tienen a una mayor diversidad de aplicaciones. Los estudios de mecánica, electricidad, dinámica de fluidos, estadística entre otras, conducen todos de manera natural a funciones de más de una variable.
Las funciones de varias variables se presentan en la Ingeniería Industrial de forma cotidiana. Desde las funciones producción, que permiten comparar los niveles de la misma en distintos puntos, hasta la necesidad de aplicación para funciones de maquinaria o equipo que toman en cuenta factores externos, así como los sistemas de fiabilidad de circuitos, la simulación o los softwares matemáticos utilizados diariamente en la industria.
Por todo lo expresado es importante el estudio y la representación gráfica de las funciones multivariables.

Las funciones de varias variables independientes reales se definen de manera similar a las funciones de una sola variable. Los puntos en el dominio son pares ordenados (ternas, cuartetas, …, n-adas) de números reales, y los valores del rango son números reales como los que hemos trabajado desde el principio.

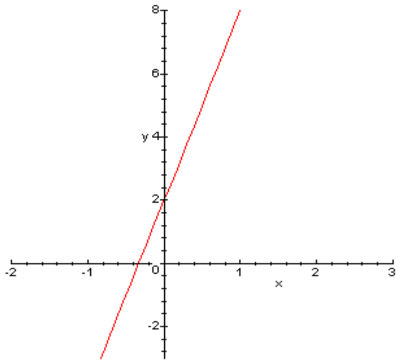
Recordando la **definición de función de una variable** expresa que si D es un subconjunto de los números reales, $D \subseteq \mathfrak{R}$, **si** a cada $x \in D$ le corresponde un único número real $y = f(x)$, entonces se dice que f es función de x. El conjunto D es el dominio de $y = f(x)$.

Simbólicamente: $f : D \to \mathfrak{R}$ con $D \subseteq \mathfrak{R}$.

$$x \to y = f(x)$$

El dominio de $f(x)$ es $D = \{x / f(x) \in \Re\}$.
La imagen de $f(x)$ es $I = \{y / y = f(x)\}$.

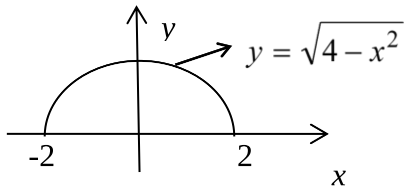
Ejemplo 1: $f: \Re \to \Re$
$x \to y = 6x + 2$



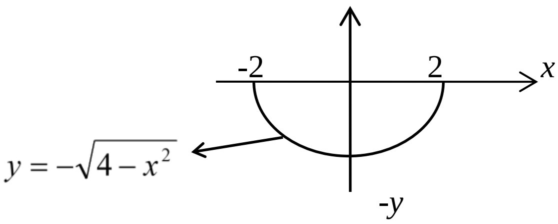
Ejemplo 2:

Sea $f: D \to \Re$; $D = [-2,2] \subset \Re$, tal que $x^2 + y^2 = 4$ es una función multiforme, de donde obtenemos $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = -\sqrt{4 - x^2}$ que son función uniformes:

1) $y = \sqrt{4 - x^2}$; $D = [-2,2] \subset \Re$



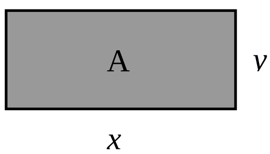
2) $y = -\sqrt{4 - x^2}$; $D = [-2,2] \subset \Re$



Si f es una función de dos variables independientes, por lo general llamamos ***x* e *y* a las variables independientes**, y ***z* a la variable dependiente**; además, dibujamos el dominio de f como una región en el plano xy.
Si f es una función de tres variables independientes, llamamos x, y, z a las variables independientes y w a la dependiente, y dibujamos el dominio como una región en el espacio.
En las aplicaciones tendemos a usar letras que nos recuerden lo que representan las variables. Por decir algo, el volumen de un cilindro circular recto es una función de su radio y su altura; podemos escribir $V = f(r, h)$. Para precisar, podemos sustituir la notación $f(r, h)$ por la fórmula que calcula el valor de V a partir de los valores de r y h, y escribir $V = \pi r^2 h$. En tal caso, r y h serán las variables independientes y V la variable dependiente de la función.

Se verán algunos ejemplos:

1) El área A de un rectángulo de lados x e y, viene dada por la fórmula **A = *x y*.**



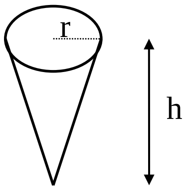
A cada par de valores de *x* e *y*, corresponde un valor determinado del área A; A es una función de dos variables, $A = f(x, y)$.

2) La presión P ejercida por un gas ideal encerrado, es función de su temperatura y de su volumen V, $P = P(T,V)$.

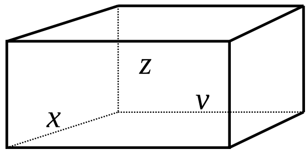
$$P = k\left(\frac{T}{V}\right) \qquad k = \text{cte.}$$

3) El volumen V de un cono de altura h y radio r; viene dado por la formula $V = \frac{\pi r^2}{3}h$

$V=V(r,h)$.



4) El volumen V de un paralelepípedo recto, cuyas aristas tienen longitudes iguales a *x*,*y*,*z* viene dado por la fórmula: $\mathbf{V = x\ y\ z}$. Luego el volumen es función de tres variables, $V = V(x,y,z)$.



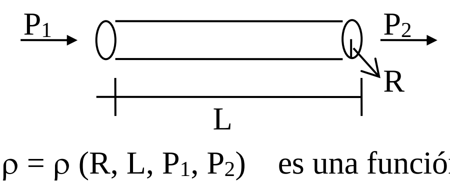
5) La ley de Poiseville dice que la intensidad del flujo de un fluido viscoso (como la sangre) a través de un conducto (como una arteria) es:

$$\rho = k\frac{R^4}{L}(P_1 - P_2)$$

R = radio del conducto

L = longitud

P_1 y P_2; presiones en los extremos del conducto.



$\rho = \rho(R, L, P_1, P_2)$ es una función de cuatro variables independientes.

2. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

2.1. Definición: Función real de dos variables

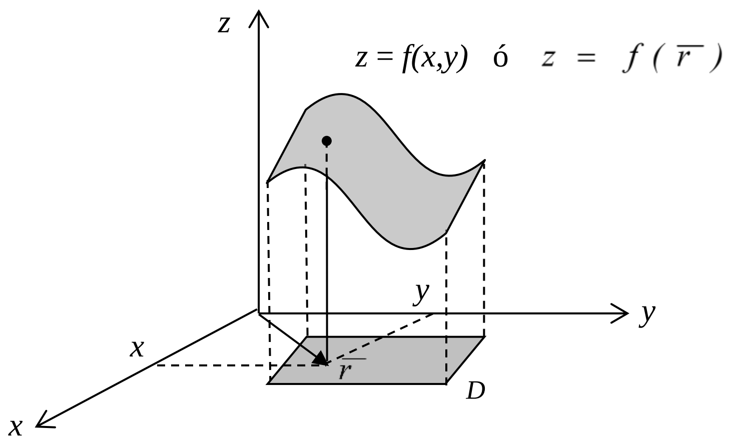
Definición de función de dos variables: Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (*x*,*y*) de D le corresponde un número real único $z = f(x,y)$, entonces se dice que *f* es función de *x* e *y*.

El conjunto D es el **dominio** de $z = f(x,y)$ y el correspondiente conjunto de valores de $f(x,y)$ es la imagen (o recorrido) de *f*. D es un subconjunto de R^2.
Las variables independientes son *x* e *y*, la variable dependiente es *z*.

Simbólicamente: la regla de asignación es:

$$f : D \to \Re \qquad D \subseteq \Re^2$$
$$(x,y) \to z = f(x,y)$$

Expresado vectorialmente: $\bar{r} \to z = f(\bar{r})$, $\bar{r} = (x,y)$;



La **definición de función de tres o más variables** es una generalización de la anterior:

$$f : D \to \Re \qquad D \subseteq \Re^3$$
$$(x,y,z) \to w = f(x,y,z)$$
$$\bar{r} \to w = f(\bar{r}) \qquad \bar{r} = (x,y,z)$$

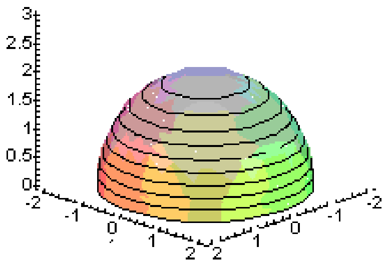
Nota: Observemos que *f* está contenido en un espacio de dimensión cuatro, luego no podemos trazar su gráfica en el espacio de tres dimensiones.

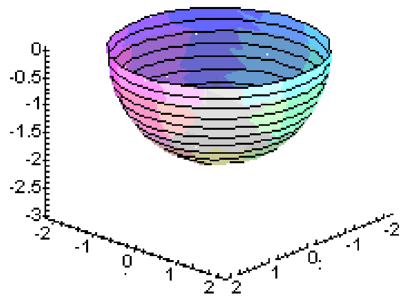
2.2. Campo de Existencia

Sea $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ecuación de la esfera de radio a, si despejamos *z* obtenemos;

$z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ quedando así definidas dos funciones uniformes:

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $\qquad\qquad$ $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$





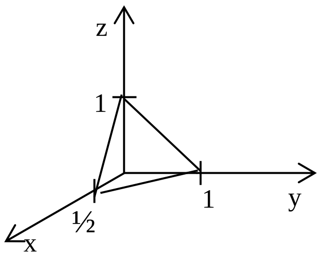
Las gráficas anteriores corresponden al caso particular cuando a = 2

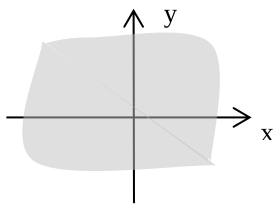
Estas funciones están definidas sólo cuando $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$ es decir cuando $x^2 + y^2 \leq a^2$ (en $\Re^2$). El conjunto D = {(x , y) $\in \Re^2$: $x^2 + y^2 \leq a^2$} se llama **dominio de definición** o **campo de existencia** de la función.

Definición: Sea $z = f(x,y)$ un campo escalar, $f: \Re^2 \to \Re$ se denomina **dominio de definición o campo de existencia al conjunto** $\boxed{D = \left\{ (x, y) \in \Re^2 : z = f(x, y) \in \Re \right\}}$.

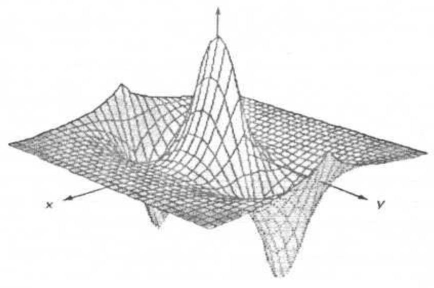
Ejemplos:

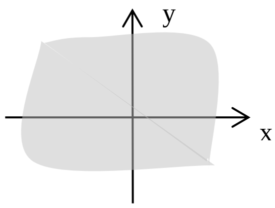
a) $z = -2x - y + 1$ $\qquad$ $D = \left\{ (x,y) : (x,y) \in \Re^2 \right\}$ función definida en todo el plano x, y





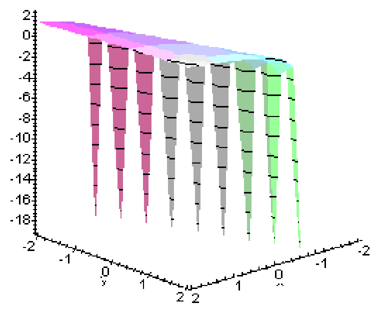
b) $z = e^{|x|}\cos(x^2 + y^2)$ $\qquad$ $D = \left\{ (x,y) : (x,y) \in \Re^2 \right\}$

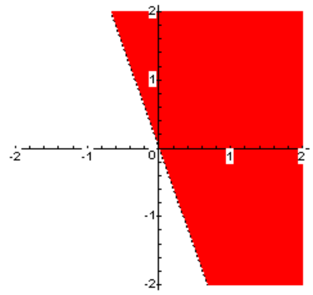




c) $z = ln(3x + y)$ $D = \{ (x,y)/3x + y > 0 \}$ luego $3x + y > 0 \rightarrow y > -3x$

Gráfica de la función Dominio de definición o Campo de existencia



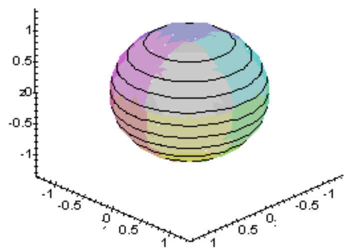


Generalización: **campo de existencia o dominio de definición de funciones de varias variables.**

Por ejemplo sea $u = f(x,y,z)$, *tal que* $u = ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$ luego el campo de definición es $D = \left\{ (x,y,z) : 1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \right\}$.

Implica que $1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 < 1$ lo que representa el interior de una esfera de radio 1.

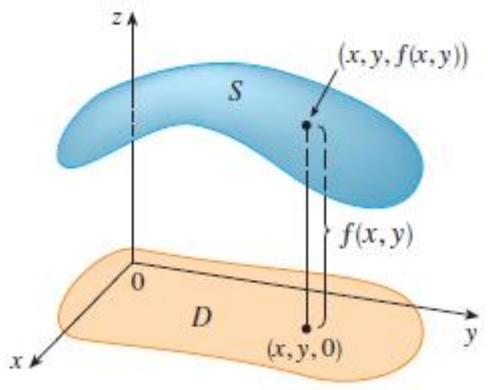
Nota: No es posible graficar la función $u = f(x,y,z)$ por ser su dimensión cuatro pero si podemos graficar su campo de existencia que es en 3 dimensiones.

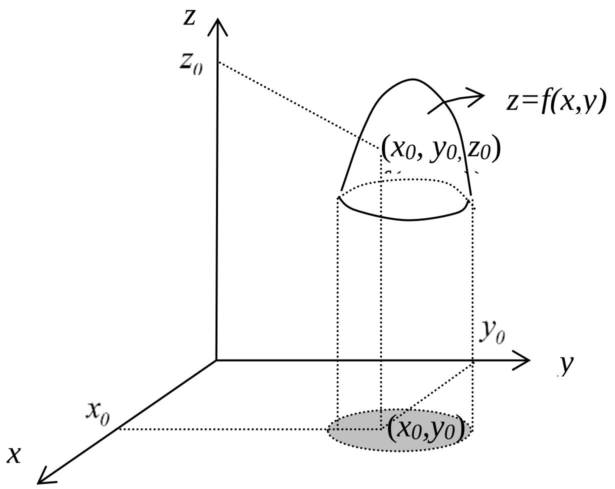


2.3. Representación Gráfica

Definición: La representación gráfica de una función $z = f(x,y)$ es una superficie, así como la función $y = f(x)$ representa una curva.

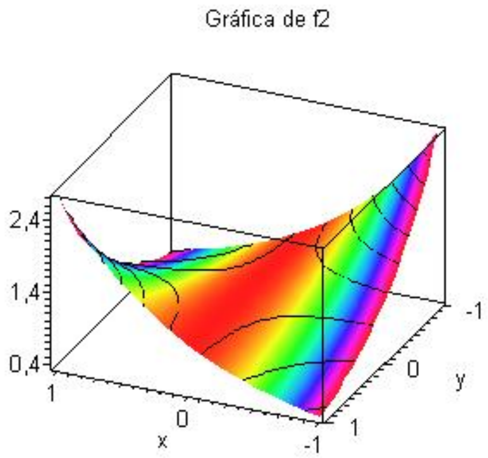
A un punto (x_0,y_0) del campo de definición de la función le corresponde $z = f(x_0,y_0)$. Luego $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ son las coordenadas rectangulares de un punto del espacio. Si (x,y) recorre todos los puntos del campo de definición de la función $z = f(x,y)$, el conjunto de los puntos $(x,y\ ,f(x,y))$ que así resulta se llama superficie o gráfica de la función $z = f(x,y)$.





Ejemplo:

Sea $z = f_2(x,y) = e^{xy}$ graficar usando un software matemático.



2.4. Campos escalares y campos vectoriales

Durante este curso estudiaremos distintos tipos de funciones. Trabajaremos con funciones vectoriales de una variable, $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}^n$, $(\bar{r}(t))$, asociadas con curvas paramétricas y que permiten por ejemplo describir el movimiento de objetos. También usaremos funciones vectoriales de dos variables, $f: \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^n$, $(\bar{r}(u,v))$, asociadas con superficies paramétricas.
Estudiaremos funciones escalares de varias variables $f: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$, y las utilizamos para describir por ejemplo la temperatura en una placa o en un ambiente, o la densidad de la sustancia con que está hecho algún objeto; estas asocian un escalar a cada punto en el dominio.

Campo escalar: Un campo escalar se define exclusivamente por el valor de una magnitud, que adquiere el concepto físico en estudio. Ejemplos de campos escalares son: presiones, masa, temperatura, etc. Es decir, es una cantidad que es independiente de la dirección en la que se estudia.

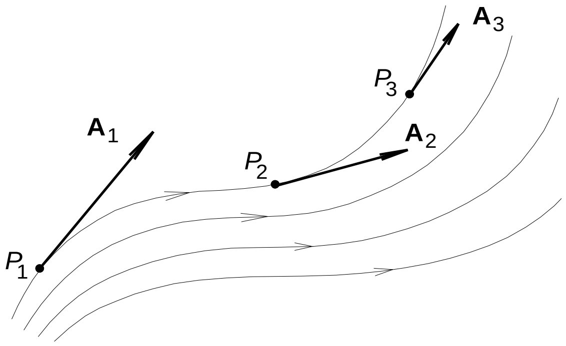
Campo vectorial: Para definir un campo vectorial, además de la magnitud, es necesario precisar dirección y sentido del concepto físico a analizar. De esta manera, lo que se había visto anteriormente como algo invariable respecto a las direcciones de estudio, se torna en un problema más complejo al incidir estas nuevas variables (dirección y sentido).

Para entender un poco mejor el concepto de campo vectorial veamos el siguiente ejemplo:
Una persona viaja en vehículo con una rapidez de 90 km/h. Esa magnitud sería el campo escalar, pues se sabe la cantidad, pero no la dirección ni el sentido. Ahora bien, se agrega otro dato: Se dirige por una ruta, la cual tiene orientación norte – sur. Con este segundo dato obtenemos la dirección. Ya deja de ser un campo escalar para convertirse en vectorial, aunque aún falta definir el sentido. Éste será proporcionado por el tercer dato, ya que si no disponemos de él no podríamos precisar si el conductor se dirige hacia Pocito o hacia Albardón, por ejemplo. Tercer dato: El sentido del automóvil es sur-norte. Con este tercer dato, acabamos de definir el vector velocidad del vehículo, es decir se sabe que circula a 90 km/h, su dirección es norte-sur, y su sentido es sur-norte.
Ahora bien, si hay más de un vehículo, cada uno tendrá su propio vector. Éstos pueden diferir del anterior o no (si van a diferentes valores de velocidad, en sentido contrario, etc.)
Este sería entonces un campo de velocidades.
La física ha optado por el concepto de vector para representar el comportamiento de una partícula. Luego, el comportamiento de un conjunto de partículas es lo que se denomina campo vectorial.
Ejemplos de estos son: el campo de velocidades, campo gravitacional, campo eléctrico, magnético, campo rotacional de un fluido, etc.
Imaginemos ahora que pretendemos estudiar el movimiento de un fluido por una cañería. No es para nada práctico estudiar cómo se mueve cada molécula que constituye el fluido; en cambio la descripción que se adopta consiste en indicar, en cada punto de la cañería, con qué velocidad pasa en elemento de fluido:$\vec{V}(x,y,z)$. Otra situación de interés es el estudio de la fuerza producida por una carga eléctrica, que sentirá otra carga dependiendo de donde esté situada: $\vec{F}(x,y,z)$.

Definición: Matemáticamente hablando**, un campo vectorial es una función que a cada punto del espacio de n dimensiones le asigna un vector de n componentes, cuyo dominio es un conjunto de puntos en R^2 o R^3 y su imagen es un conjunto de vectores de dos o tres componentes**.

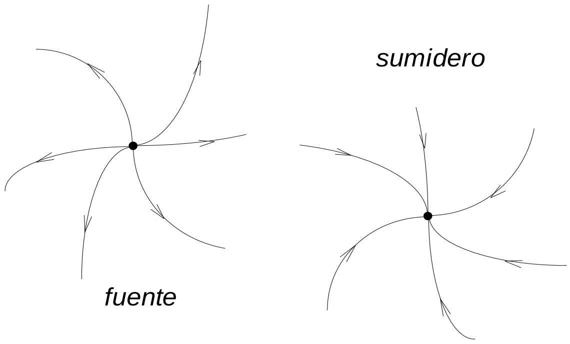
Por ejemplo: $A(x,y,z) = Ax\,\vec{i} + Ay\,\vec{j} + Az\,\vec{k}$

El campo vectorial A(x,y,z) asigna un vector a cada punto del espacio P(x,y,z).



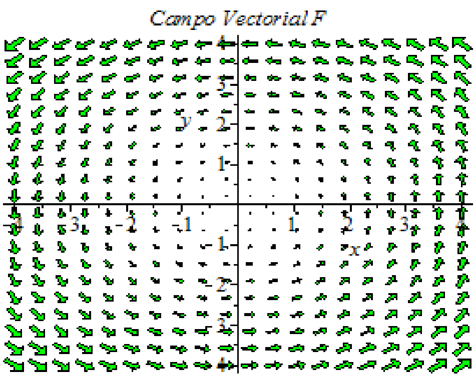
Las líneas indican la dirección del campo en cada punto. Su intensidad la representa el número de líneas por unidad de superficie transversal que hay en el entorno de cada punto. Así, en P_1 el campo es más intenso que en P_3 ya que las líneas están más apretadas en el primer punto.
Dos líneas de campo nunca se pueden cruzar porque en el punto de corte habría dos tangentes y

entonces el campo tendría dos valores distintos. No obstante, pueden existir puntos de donde divergen las líneas de campo (fuentes) o en los que convergen (sumideros). En dichos puntos el campo no está definido; existe en ellos una singularidad.



Un ejemplo de campo vectorial tipo fuente es el campo eléctrico. Más adelante se verá un ejemplo de este tipo.
La mejor **forma de graficar un campo vectorial** es representar al vector F con una flecha con origen en el punto (x,y), análogamente para un campo vectorial en el espacio. Otras representaciones gráficas utilizan conjuntos de curvas o de superficies, como las llamadas líneas de flujo, y las denominadas superficies o curvas equipotenciales. Por supuesto que es imposible hacer esto para todos los puntos (x,y), pero se puede obtener una representación razonable trazando flechas para unos cuantos puntos del dominio.
La gráfica de campos vectoriales es difícil de lograr, pero afortunadamente los software actuales permiten una visualización de los mismos.

Ejemplo: Graficar el campo vectorial $\bar{F} = -y\,\bar{\imath} + x\,\bar{\jmath}$ e interpretar el resultado obtenido.



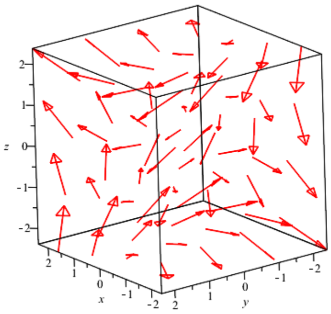
Cada punto del plano (x,y) tiene asignado un vector de coordenadas (-y,x), la figura anterior muestra que los vectores describen circunferencias centradas en el origen de radio constante. Es un campo similar al campo de velocidad determinado por una rueda que gira en el origen.

Un campo vectorial con dominio en R^2 es una función $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$, que a cada punto (x,y) le asigna un (único) vector de dos componentes. Para cada par ordenado (x,y) del dominio, se tiene asociado un vector bidimensional, cuya primera componente llamamos P(x,y) y cuya segunda componente denominamos Q(x,y). Variando de punto, las componentes del campo vectorial varían en general; las componentes P y Q son funciones escalares de dos variables. Escribimos en notación vectorial:

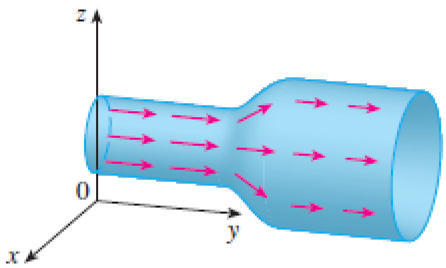
$$\boldsymbol{\bar{F} = P(x,y)\bar{\imath} + Q(x,y)\bar{\jmath}}$$

Este concepto se extiende a 3D de forma similar.

Ejemplo Campo vectorial en 3D. Graficar el campo $\overline{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{y}\,\bar{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{z}\,\bar{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{x}\,\overline{\boldsymbol{k}}$



Ejemplo Campo de velocidad. Imagine un fluido que se mueve de manera constante a lo largo de un tubo y sea **V**(x,y,z) el vector de velocidad en un punto (x,y,z). Entonces **V** asigna un vector a cada punto (x,y,z) en un cierto dominio (el interior del tubo) y por tanto **V** es un campo vectorial en $\mathcal{R}^3$ llamado campo de velocidad. La rapidez en cualquier punto dado está indicada por la longitud de la flecha.



Definición Dominio e imagen. El dominio de un campo vectorial en el espacio es un subconjunto de R^3, y el de un campo vectorial en el plano es un subconjunto de R^2.
El "dominio natural" del campo está dado por la intersección de los dominios naturales de sus funciones componentes.
La **imagen de un campo vectorial** en el espacio consiste en un conjunto de vectores de tres componentes, y la de un campo vectorial en el plano son vectores de 2 componentes. El "dominio natural" del campo está dado por la intersección de los dominios naturales de sus funciones componentes.

2.5. Generalización del concepto de función de varias variables.

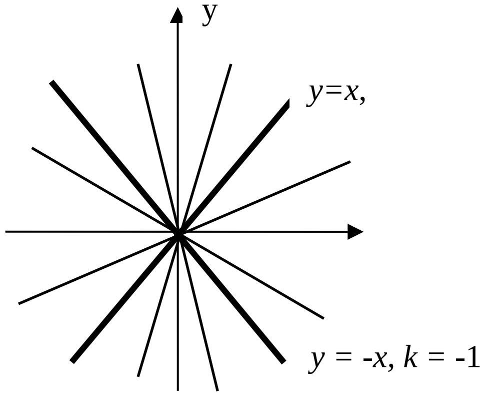
Consideremos funciones con el dominio en el espacio n-dimensional $\Re^n$ y el recorrido en el espacio m-dimensional $\Re^m$.
Es decir: $\overline{f} : \Re^{\mathbf{n}} \rightarrow \Re^{\mathbf{m}}$

Analicemos los posibles casos:

a) **m = n = 1**, $f : \Re \rightarrow \Re$
$x \rightarrow y=f(x)$

Se llama **función real de variable real**. Son las funciones estudiadas en Cálculo I, funciones de una sola variable independiente.

Ejemplo: Sea $y = k\,x$; k = constante; la ecuación de una familia de rectas



b) m = 1 y n > 1

Casos Particulares:

b1) Si n = 2,

$$f: \Re^2 \rightarrow \Re$$
$$(x,y) \rightarrow z = f(x,y)$$
$$\bar{r} \rightarrow z = f(\bar{r})$$

función de dos variables

b2) n = 3,

$$f: \Re^3 \rightarrow \Re$$
$$(x, y, z) \rightarrow w = f(x, y, z)$$
$$\bar{r} \rightarrow w = f(\bar{r}) \qquad con \quad \bar{r} \in \Re^3$$

función de tres variables

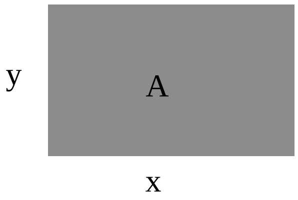
b3) m = 1 y n = k ,

$$f: \Re^k \rightarrow \Re$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \rightarrow w = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$
$$\bar{r} \rightarrow w = f(\bar{r}) \qquad con \quad \bar{r} \in \Re^k$$

En este caso $f(\bar{r})$ es una **función real de variable vectorial** o simplemente **campo escalar** de variable vectorial.
Se analizan los ejemplos dados en la página dos.

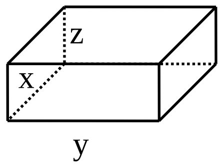
En el primer ejemplo (área del rectángulo)

$$A: D_1 \rightarrow \Re \qquad D_1 \subseteq \Re^2$$
$$(x,y) \rightarrow A = A(x,y) = x\,y$$
$$\bar{r} \rightarrow A = A(\bar{r})$$



En el cuarto ejemplo (Volumen paralelepípedo)

$$V : D_2 \to \Re \qquad D_2 \subseteq \Re^3$$
$$(x,y,z) \to V = V(x,y,z) = x.y.z$$
$$\bar{r} \to V = V(\bar{r})$$



c) Si n = 1   y   m > 1

$$\bar{f} : \Re \to \Re^m$$
$$x \to \bar{f} = \bar{f}(x) = f_1(x)\,\bar{e}_1 + \ldots + f_m(x)\,\bar{e}_m$$

$\bar{f}$ es una **función vectorial de variable real.**

Ejemplo: Si m=2

$$\bar{f} : \Re \to \Re^2$$
$$x \to \bar{f} = \bar{f}(x) = x^2\ \bar{e}_1 + (2x+6)\ \bar{e}_2$$

d) Si n > 1   y   m > 1

$$\bar{f} : \Re^n \to \Re^m \qquad \bar{r} \in \Re^n \quad \text{luego} \quad \bar{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\bar{r} \to \bar{f} = \bar{f}(\bar{r}) = f_1(\bar{r})\ \bar{e}_1 + \ldots + f_m(\bar{r})\ \bar{e}_m$$

$\bar{f}(\bar{r})$ es una **función vectorial de variable vectorial** o simplemente **campo vectorial de variable vectorial.**

Por ejemplo:

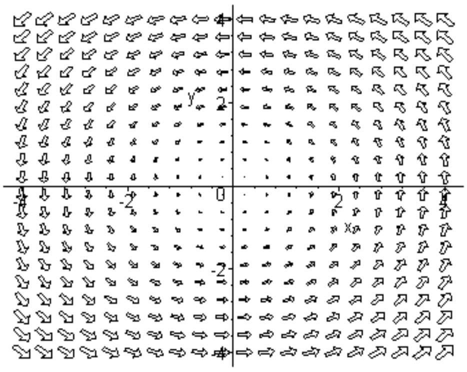
1) Si   n = 2   y   m = 2

$$\bar{f}: \Re^2 \to \Re^2$$
$$(x,y) \to \bar{f}(x,y) = f_1(x,y)\bar{\imath} + f_2(x,y)\bar{\jmath}$$

Ejemplo:

Graficar el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = -y\bar{e}_1 + x\bar{e}_2 = (-y, x)$ e interpretar el resultado obtenido.

Campo Vectorial F

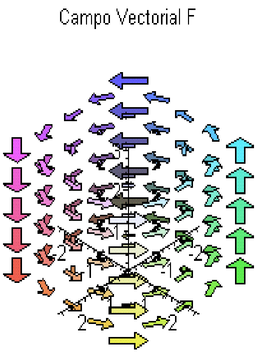


Cada punto del plano (*x*, *y*) tiene asignado un vector de coordenadas (*-y*, *x*). En este caso, se observa que los vectores de igual longitud describen círculos centrados en el origen.

2) Si n = 2 y m = 3

Un líquido está girando en un recipiente cilíndrico de radio 2, y altura 2, acotado inferiormente por la superficie de ecuación z = 0, de manera tal que su movimiento viene descrito por el campo de velocidades

$$F(x,y,z) = \left(-y\sqrt{x^2+y^2}, x\sqrt{x^2+y^2}, 0\right)$$



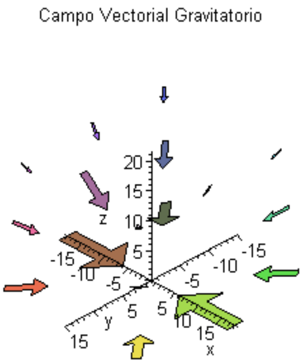
3) Si n = 3 y m = 3

Graficar el campo vectorial gravitatorio

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{-Gm_1m_2}{x^2+y^2+z^2}\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

considerando

$$-Gm_1m_2 = -10$$



4) **Si n = 2 y m = 3**

$$\bar{f} : \Re^2 \to \Re^3$$
$$\bar{f} = \bar{f}(x,y) = f_1(x,y)\bar{e}_1 + f_2(x,y)\bar{e}_2 + f_3(x,y)\bar{e}_3$$

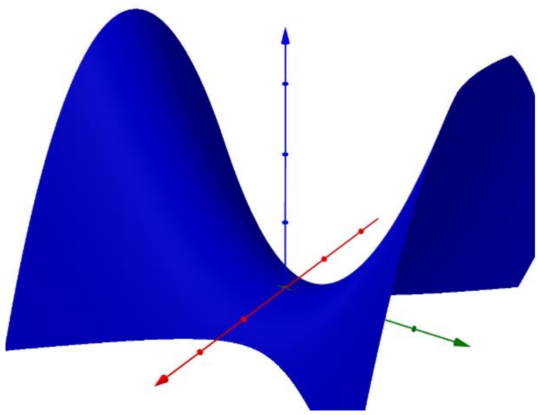
Donde f_1, f_2 y f_3 son campos escalares.

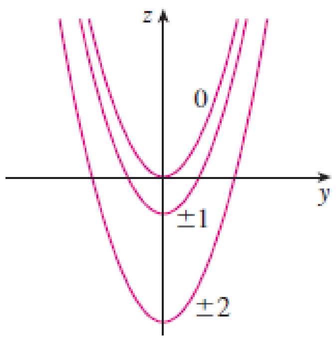
Observación: Los ejemplos antes analizados definen funciones uniformes, a cada vector de $\Re^2$, $\Re^3$, $\Re^4$ le asigna un único valor de *f* que puede representar área, volumen o alguna ley física.
Cuando a las variables independientes se les asigna más de un valor se obtienen las funciones multiformes.

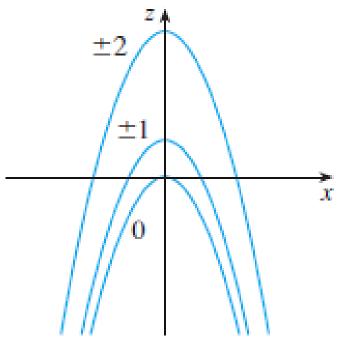
3. CURVAS DE NIVEL

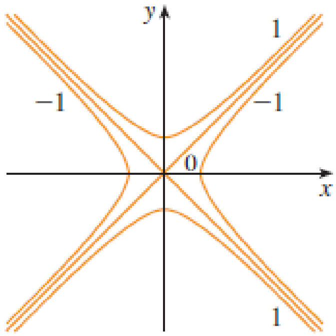
Al trazar las gráficas de funciones de dos variables, con frecuencia es útil empezar por determinar las formas de secciones transversales (cortes) de la gráfica.
Por ejemplo, si cortamos con un plano *x*= *k* (constante), el resultado es una función de una variable *z= f(k,y),* cuya gráfica es la curva que resulta de la intersección de la superficie *z* = *f(x,y)* con el plano vertical *x* = *k*.
Del mismo modo podemos cortar la superficie con un plano vertical *y* = *k* y vemos las curvas *z=f(x,k)*.

Estos tipos de curvas obtenidas se denominan **trazas (o secciones transversales) de la superficie z=f(x,y).**
También podemos hacer un corte con planos horizontales z = k, estas curvas las estudiaremos al detalle.
Ejemplo: Trace la gráfica de $f(x,y) = y^2 - x^2$



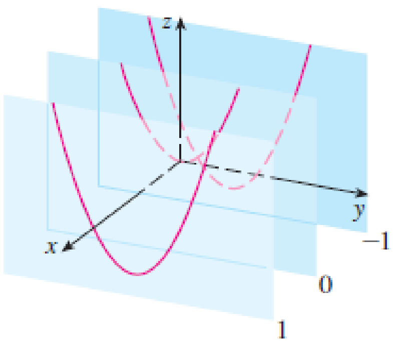


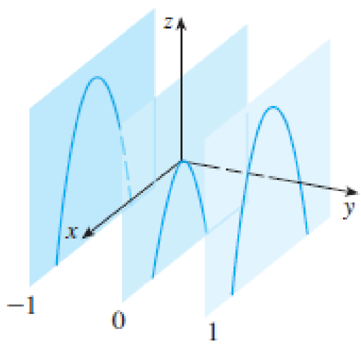


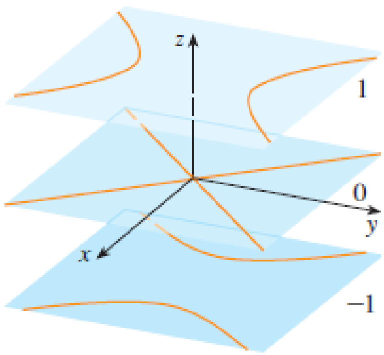


Trazas en x= k , son $z=y^2-k^2$ Trazas en y= k , son $z=k^2-x^2$ En z= k , son $k=y^2-x^2$

Como se ven las trazas en los planos correspondientes:







Trazas en x= k Trazas en y= k Para z= k

Un método para representar geométricamente la función $z = f(x,y)$ consiste en usar las llamadas curvas de nivel.

Sea la gráfica de una función de dos variables $z = f(x,y)$, la intersección de ella con un plano horizontal de ecuación $z = c$ genera una curva de ecuación $f(x,y) = c$.
La proyección de esa curva sobre el plano *x, y* se llama Curva de Nivel (Figura a), y una colección de tales curvas es un mapa de curvas de nivel

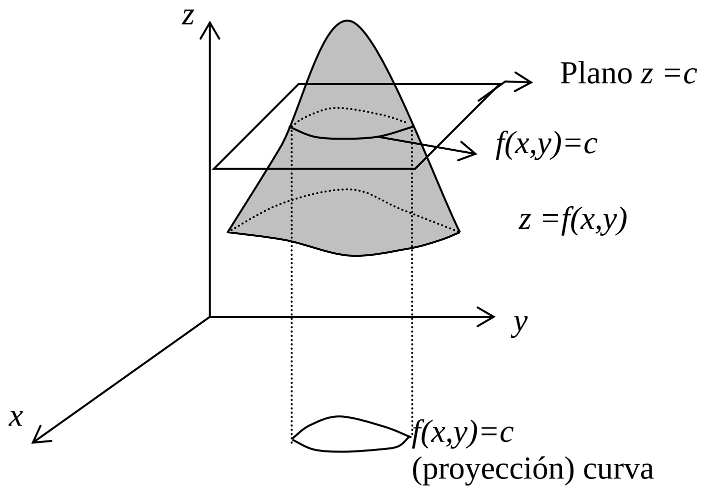


Fig. a

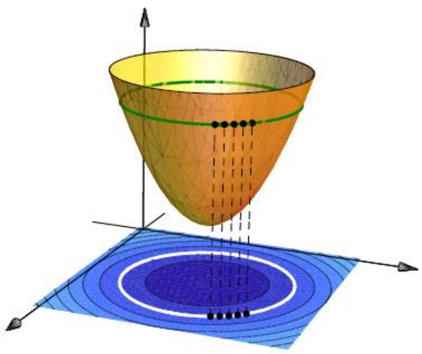
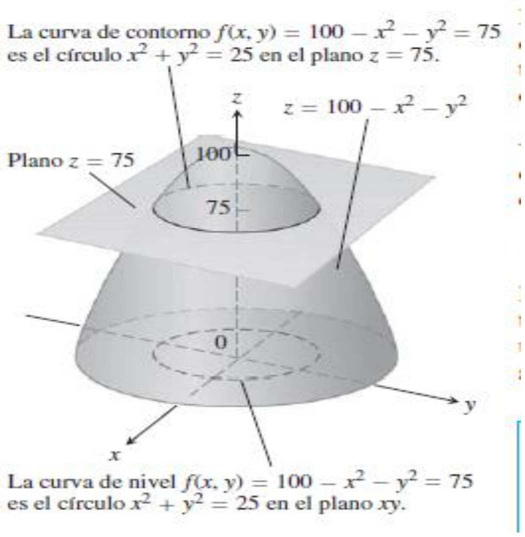
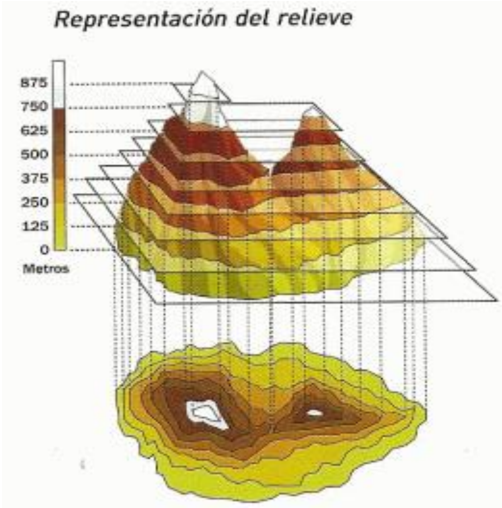


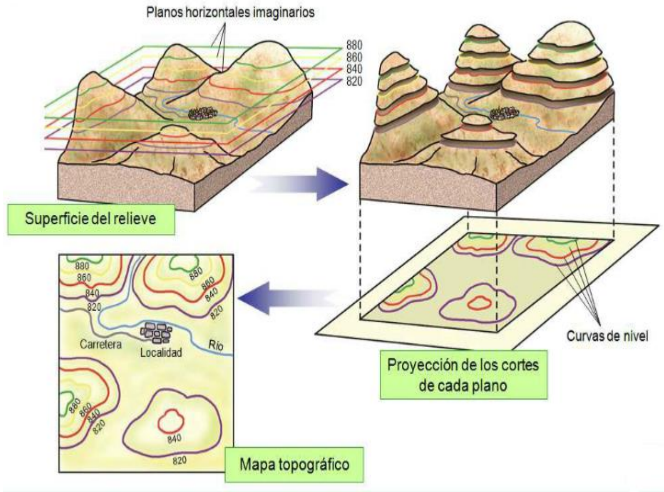
Fig. b: sobre la curva de nivel la función tiene valores constantes



Algunas aplicaciones de curvas de nivel:
En mapas topográficos: las curvas representan altitudes constantes. caminar sobre una curva significa caminar en un camino horizontal.

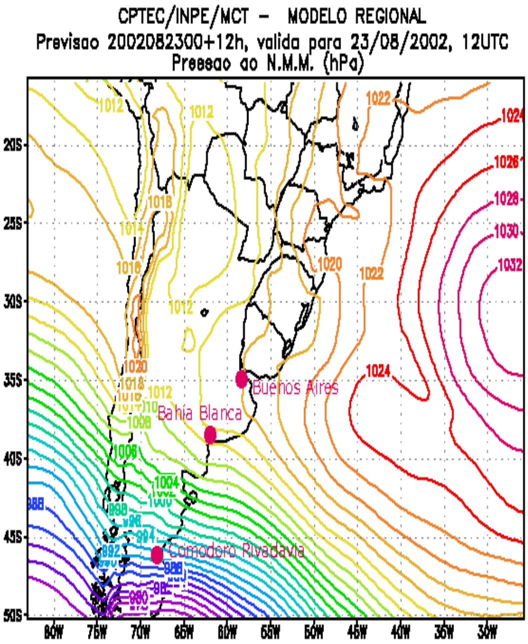
En la siguiente figura se ve el proceso de obtención de un mapa de contorno topográfico.

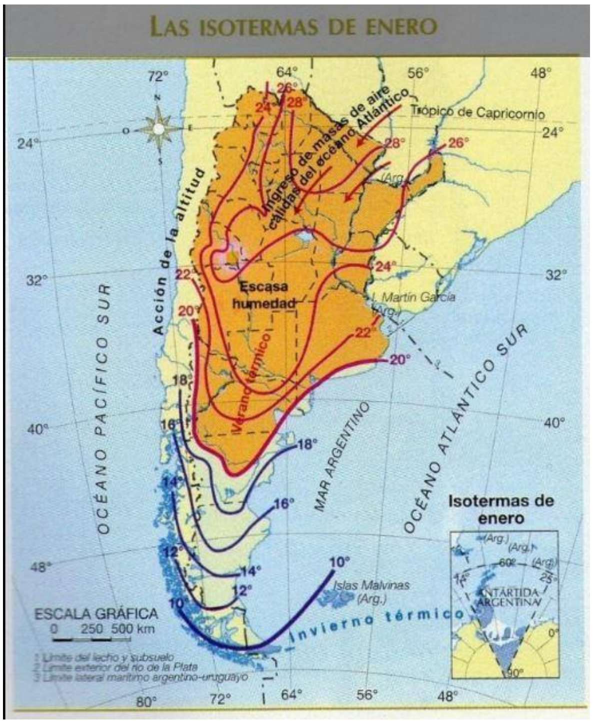




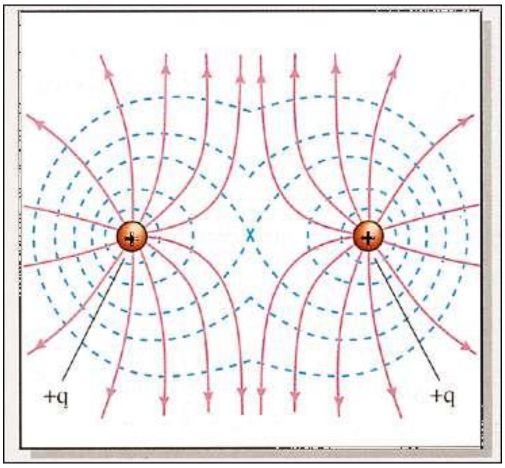
En ciencia a menudo se encuentran las palabras isotérmico, equipotencial e isobárico. El prefijo iso proviene de la palabra griega isos, la cual significa igual o lo mismo. Entonces, dichos términos se aplican a líneas o curvas sobre las cuales es constante la temperatura, el potencial o la presión barométrica

En mapas meteorológicos, curvas de igual presión se denominan isobaras, y curvas de igual temperatura, isotermas.



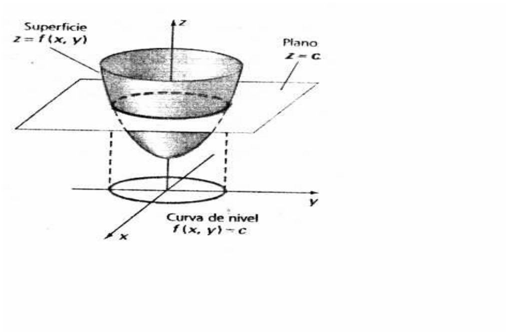


En campos de potencial eléctrico, **curvas equipotenciales**.



Ejemplo 1:

Calcular las curvas de nivel del paraboloide de revolución $z = 1 + x^2 + y^2$.



$z = 1 + x^2 + y^2$, *tomando* z

$x^2 + y^2 = c - 1$, *tiene validez sólo para* $c - 1 \geq 0, c \geq 1$

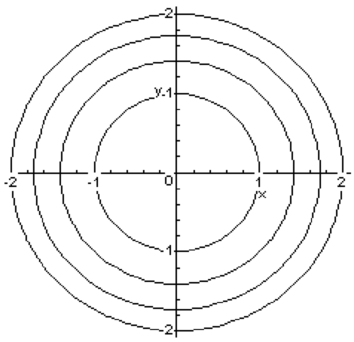
$c = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 0$, origen de coordenadas.

$c = 2 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$, circunferencia de radio 1

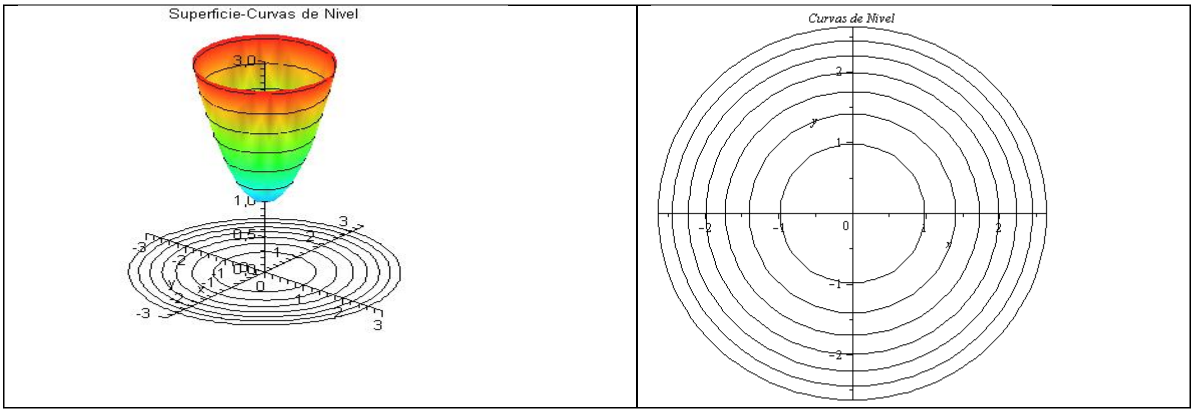
$c = 3 \rightarrow x^2 + y^2 = 2$, circunferencia de radio $\sqrt{2}$

$c = 4 \rightarrow x^2 + y^2 = 3$, circunferencia de radio $\sqrt{3}$

$c = 5 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$, circunferencia de radio 2

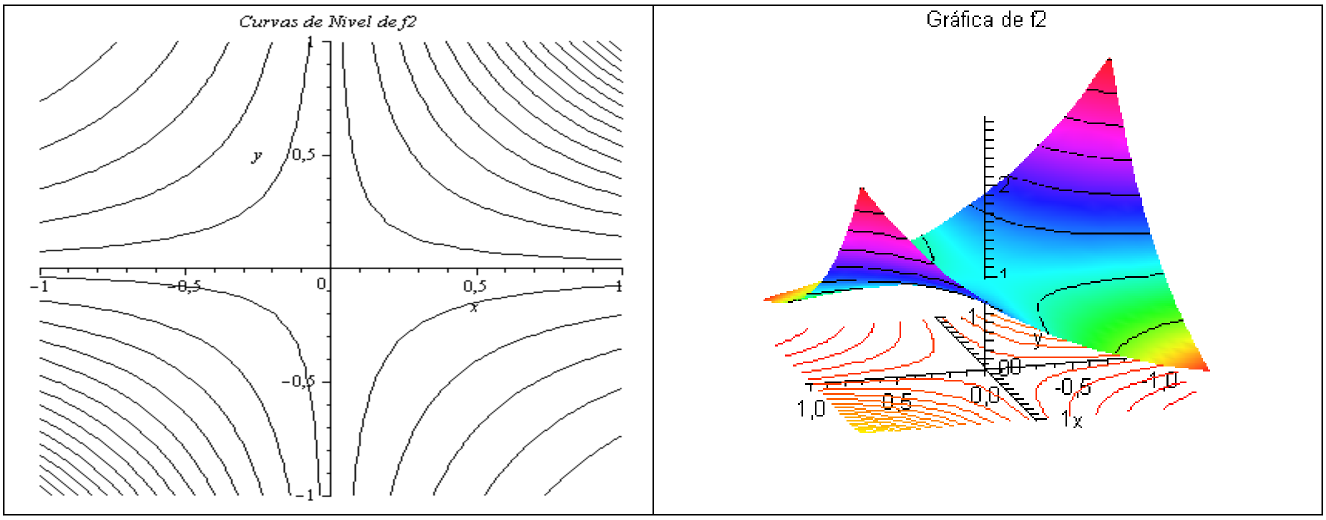


El ejemplo resuelto con software matemático:



Ejemplo 2:

Sea $z = f(x,y) = e^{xy}$ graficar las curvas de nivel utilizando un software matemático**.**



Este método se usa también en la representación de funciones de tres variables *u =f(x, y, z)* en este caso se obtienen superficies de nivel, *f(x, y, z)=c.*

Ejemplo 3:

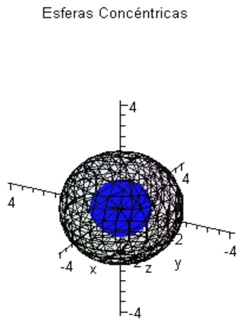
Sea $u = x^2 + y^2 + z^2$

La superficie de nivel: $x^2 + y^2 + z^2 = c$

$c = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0$, punto (0, 0, 0)

$c = 1 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$, esfera de radio 1

$c = 2 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2$, esfera de radio $\sqrt{2}$

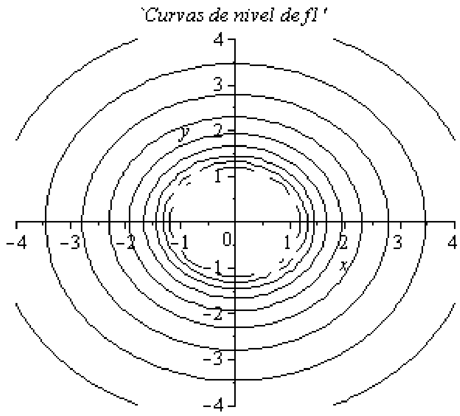


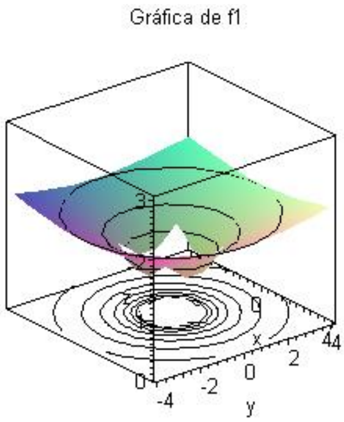
Nota: La superficie *u = f(x,y,z)* en cuatro dimensiones no se puede graficar.

Ejemplo 4:

Sea $f_1(x,y) = \sqrt{ln(x^2 + y^2)}$, grafique la superficie y las curvas de nivel correspondientes. Encuentre las curvas de nivel analíticamente.

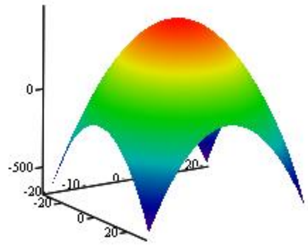
Si dispone de un software científico puede graficar las curvas de nivel y la superficie de la función dada.

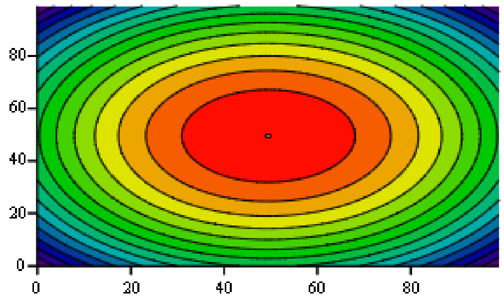




Ejemplo 5: Supongamos que tenemos un ordenador con una placa metálica de grandes dimensiones. La temperatura de la placa (lo que nos dará una idea de como tiene que ser el ventilador para que no se caliente en exceso) es función de las coordenadas de cada uno de sus puntos y viene dada por : $\mathrm{T(x,y)} = 500 - 0{,}6\,\mathrm{x}^2 - 1{,}5\,\mathrm{y}^2$. Veamos la gráfica y el mapa de curvas de nivel:

Grafica 3D   Curvas de nivel

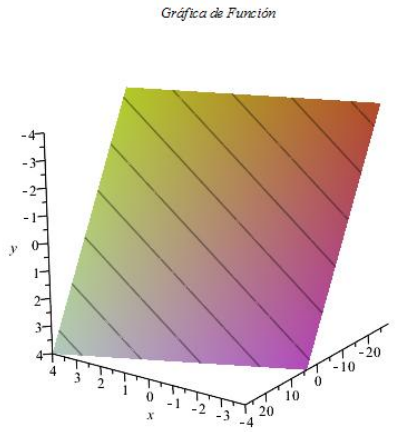


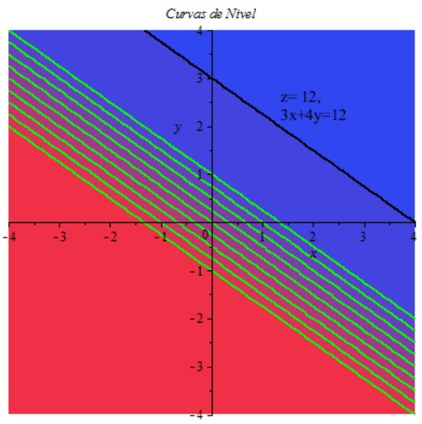


Esta gráfica nos permite observar comparando colores que el punto máximo se encuentra en el centro de las curvas de nivel y como la función representa la temperatura es el punto que alcanza máxima temperatura, y si descendemos por la gráfica vemos la posición de los distintos cortes con planos paralelos al xy, que representan las curvas isotérmicas.

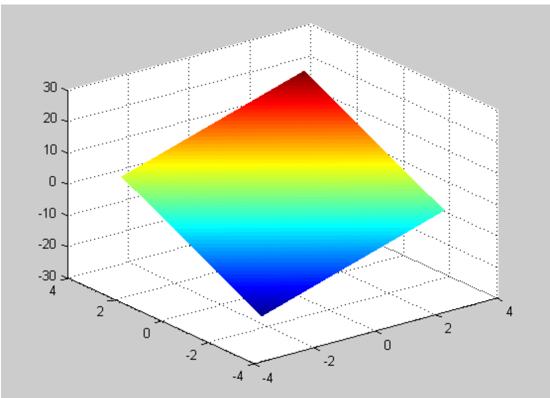
Ejemplo 6: Dada la función z = f(x,y) = 3x + 4y, se pide:
a) ¿Cuál es el dominio de esta función?
b) La gráfica de la función.
c) ¿Cuál es la curva de nivel para el valor z = 12? Deducirla matemáticamente.
d) Dibujar el mapa de curvas de nivel de la función. Interpretarla.

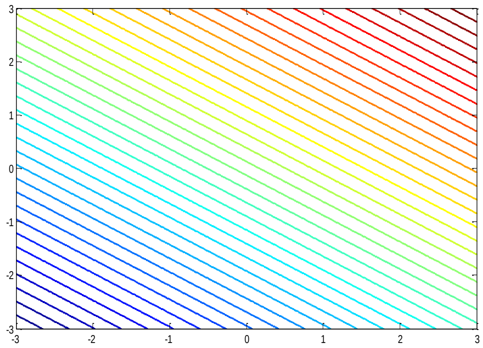
a) La función está definida para cualquier par (x,y) de R^2. Por tanto, D = R^2.





La gráfica de la función es un plano. De hecho, las funciones f(x,y) = ax + by son llamadas funciones lineales en dos variables. Graficada con otro software:





4. DERIVADAS

Las derivadas parciales miden cambios y permiten localizar puntos críticos absolutos y relativos de las funciones, lo cual es de suma importancia para optimizar procesos. Lo principal en este tipo de cálculos es saber interpretar los resultados, de forma que sepamos qué representan y qué pasa cuando se da determinado cambio en la función que describe al problema.

4.1. Definición:

Las derivadas parciales primeras de la función *z = f(x, y)* con respecto a *x* e *y* son las funciones f_x y f_y definidas mediante:

$$\boxed{f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}} \qquad (1)$$

$$\boxed{f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}} \qquad (2)$$

siempre y cuando estos límites existan.

4.2. Notación de derivadas parciales:

Si $z = f(x,y)$, las derivadas parciales f_x y f_y se denotan por:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Las derivadas parciales primeras evaluadas en el punto (*a*, *b*) se denotan por:

$$\boxed{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a,b)} \quad \textbf{y} \quad \boxed{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a,b)}$$

4.3. Cálculo de una derivada parcial.

En (1) observe que la variable *y* no cambia en el proceso del límite, en otras palabras, *y* se mantiene fija, sólo se deriva con respecto a *x*. De manera similar, en la definición del límite (2) la variable *x* se mantiene fija, sólo se deriva con respecto a *y*.

Las dos derivadas parciales de primer orden (1) y (2) representan entonces las tasas de cambio de f con respecto a x e y.

En un nivel práctico tenemos las siguientes guías simples:

Por reglas de la diferenciación ordinaria se entienden las reglas formuladas para funciones de una variable: reglas del múltiplo constante, suma, producto, cociente, potencia,etc.

- Para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, emplee las leyes de la diferenciación ordinaria mientras trata a *y* como una constante.
- Para calcular $\frac{\partial z}{\partial y}$, emplee las leyes de la diferenciación ordinaria mientras trata a *x* como una constante.

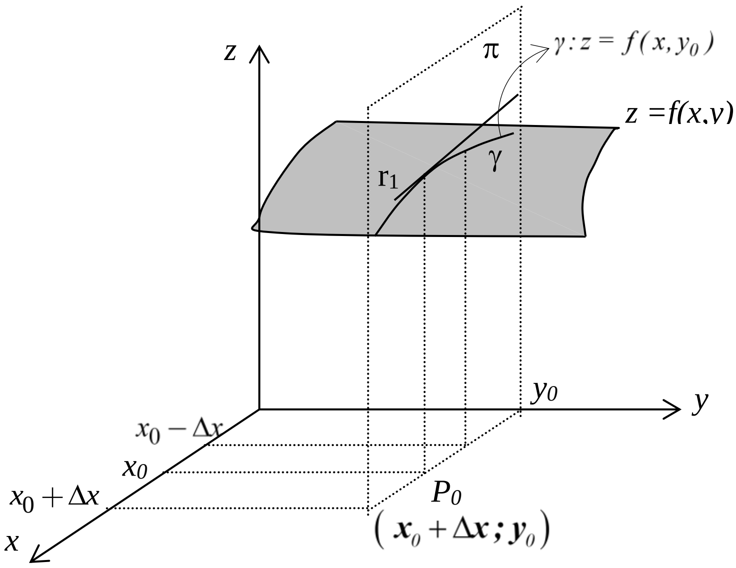
4.4. Interpretación Geométrica de las Derivadas Parciales.

Sea $z = f(x,y)$ una función dada; $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto perteneciente al dominio de la función, se considera un plano paralelo a xz ; $y = y_0$.

Sea γ la curva que resulta de la intersección del plano con la superficie es decir:

$$\Upsilon = \begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases} \longrightarrow \Upsilon : z = f(x, \quad y_0) \ ; \quad y = y_0$$

γ es una curva plana ($\gamma \subseteq \pi$; π ; $y = y_0$)



Al ser γ una curva plana representada por $z = f(x,y)$ queremos hallar (si existe) la recta tangente a la curva γ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Por lo visto en cursos anteriores se puede afirmar que la pendiente de la recta tangente r_1 es:

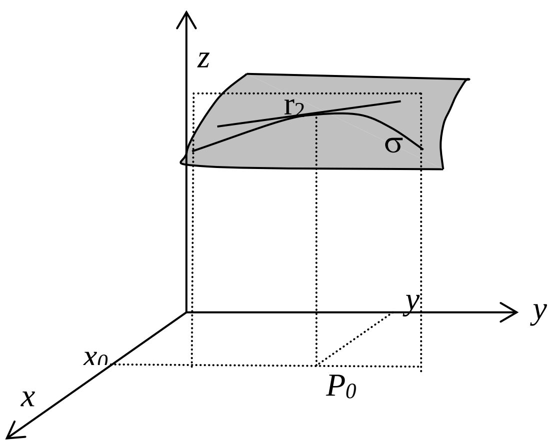
$m_{r1} = f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$, representa la **razón de cambio de z** en la dirección x.

El valor m_{r_1} es la derivada parcial de $z = f(x, y)$ respecto de x, luego

la ecuación de la recta r_1 es: $\begin{cases} y = y_0 \\ z - z_0 = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot (x - x_0) \end{cases}$

De forma análoga si dada $z = f(x,y)$ la interceptamos con el plano $x = x_0$ paralelo al plano $y\,z$ resulta la curva σ

$$\sigma : \begin{cases} x = x_0 \\ z = f(x,y) \end{cases} \rightarrow \sigma : z = f(x_0, y)$$

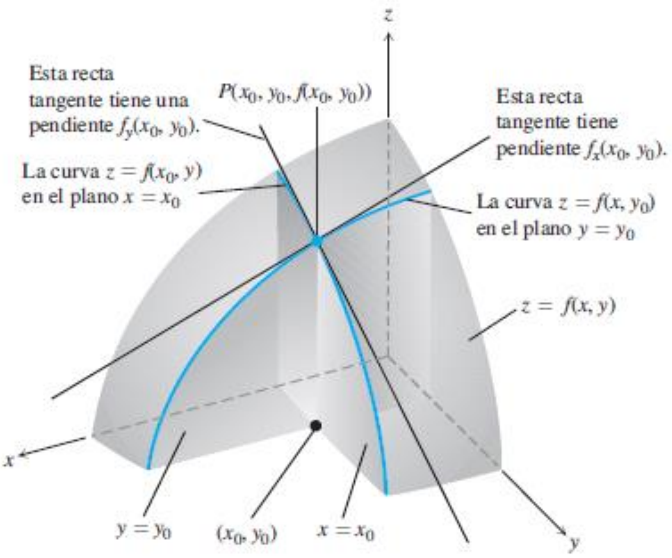


La pendiente de la recta tangente r_2 es:

$m_{r2} = f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$, representa la **razón de cambio de z** en la dirección y. Es la derivada parcial de $z = f(x,y)$ respecto a y.

La ecuación de la recta r_2 es : $\begin{cases} x = x_0 \\ z - z_0 = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0) \end{cases}$

En la siguiente figura se observa la interpretación geométrica de las dos derivadas parciales, f_x y f_y , las rectas tangentes en el punto P. ¿El plano que forman estas rectas, es tangente a la superficie? Más adelante en este tema comprobaremos esto.



Toda derivada es la medida de una tasa de variación. Por ejemplo la $f_x(Po)$ proporciona la tasa de variación instantánea en Po de f(x,y) por unidad de variación de x.
De esta manera, las derivadas parciales de una función $z = f(x, y)$ en un punto Po = (x_0,y_0) nos hablan del comportamiento geométrico (la inclinación) de la superficie que tal función representa, en las direcciones de los ejes x e y. Esta es una información "parcial".

Ejemplo:
Calcular y evaluar las derivadas parciales de $z = f(x,y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$ en el punto (2,1)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 - 2xy^2 + 2 \cdot 3 \cdot x^2 y = 3 - 2xy^2 + 6x^2 y$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} = 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 \cdot 1 = 3 - 4 + 24 = 23$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 - x^2 2y + 2 \cdot x^3 y = -2x^2 y + 2x^3 \ ,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)} = -2 \cdot 2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 2^3 = -8 + 16 = 8$$

Ejemplo:

El plano $x=1$ interseca al paraboloide $z=x^2+y^2$ en una parábola. Encuentre la pendiente de la tangente a la parábola en el punto $P(1,2,5)\cdot$

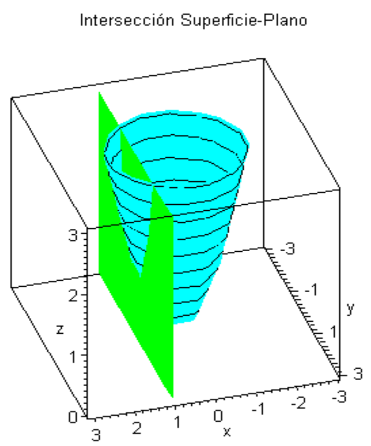
Primero realizamos la intersección entre la superficie y el plano $x=1$.

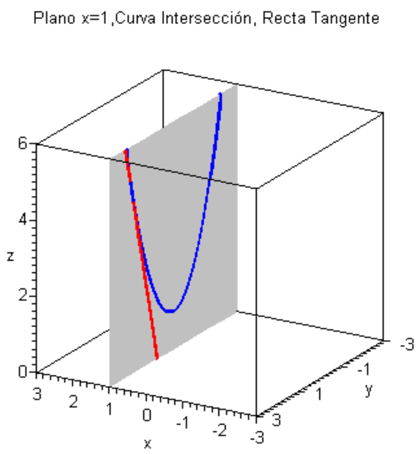
$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x=1 \end{cases}$$

se obtiene la parábola $z=1+y^2$, la pendiente de la recta tangente es $z_y = 2\ y\big|_P = 4$

La recta tangente a la parábola en el punto es $z - z_0 = z_y(P)(y - y_0)$ en nuestro caso $z=4y-3$

Se muestran las gráficas obtenidas.





4.5. Reglas de Cálculo de las derivadas parciales

Sean f y g dos funciones de varias variables, valen las siguientes reglas de derivación:

1) $\frac{\partial}{\partial x}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}$, 2) $\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$

3) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$ $g \neq 0$

4.6. Derivadas sucesivas

Dada $z = f(x, y)$ vimos que $z_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x$; $z_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y$ son funciones.

Se puede calcular la derivada segunda de $z = f(x, y)$, es así que:

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}[z_x] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \quad , \quad z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}[z_x] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}[z_y] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} \quad , \quad z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}[z_y] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

De igual forma para las derivadas de 3° orden, por ejemplo:

$$z_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}[z_{xx}] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx} \quad , \quad z_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}[z_{xx}] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f_{xxy}$$

Se enunciará un teorema que nos asegura la igualdad de las derivadas cruzadas.

4.7. Teorema de la Derivada Mixta

Sea $z = f(x, y)$ existen sus derivadas parciales f_x, f_y f_{xy} y f_{yx} definidas en un entorno U(x_0,, y_0) y todas continua en $P_0 = (x_0, y_0)$. Entonces $\boxed{f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)}$

Si $w=f(x,y,z)$ tiene derivadas parciales continuas de cualquier orden, entonces de manera análoga:

$$\mathbf{f_{xyz} = f_{yzx} = f_{zyx}}$$
$$\mathbf{f_{xxy} = f_{yxx} = f_{xyx}}$$

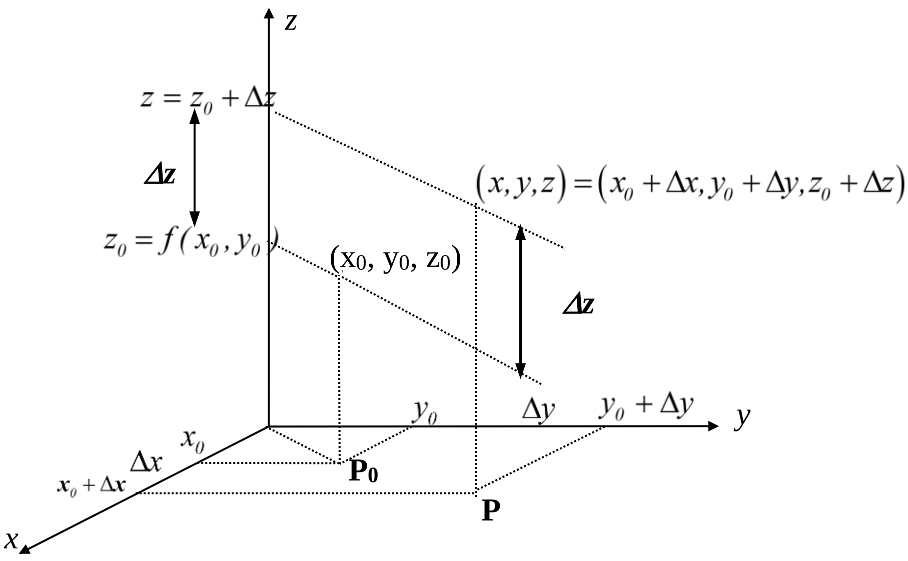
5. INCREMENTO DE UNA FUNCIÓN

La definición de diferenciabilidad de una función de cualquier número de variables independientes depende de la noción de un incremento de la variable dependiente.

Sea z = f(x, y) una función dada, P=(x, y) y $P_0 = (x_0, y_0)$ dos puntos de su dominio.

Se define **incremento Δz** de la variable dependiente *z* a:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad \text{con} \quad x = x_0 + \Delta x \quad \text{e} \quad y = y_0 + \Delta y$$



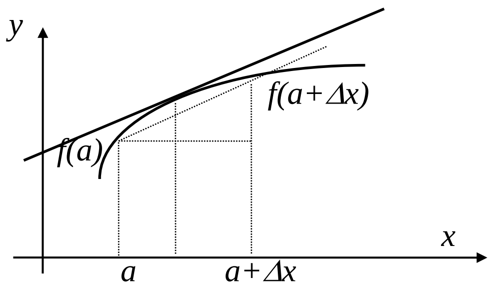
Recordando el teorema de Lagrange o del Valor Medio del cálculo diferencial para funciones de una variable $y = f(x)$:

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces existe un valor $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$\Delta f = f(b) - f(a) = f'(\xi)\cdot(b-a)$$

Como $b - a = \Delta x$, $\xi = a + \theta\cdot\Delta x$ $0 < \theta < 1$, entonces

$$\Delta f = f(a+\Delta x) - f(a) = f'(a+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$$



Se verá la forma de expresar el incremento de funciones de dos variables.

5.1. Teorema de los Incrementos Finitos (o Primera fórmula de Lagrange)

Sea $z = f(x,y)$ una función continua que admite derivadas parciales en el interior de una región abierta R, que contiene a (x_0, y_0) entonces podemos escribir para los puntos de R el incremento de Δz como:

$$\boxed{\Delta z = \Delta x \cdot f_x(x_0 + \theta_1\cdot\Delta x, y_0) + \Delta y \cdot f_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2\cdot\Delta y)}$$ con $0 < \theta_1 < 1$; $0 < \theta_2 < 1$

Demostración:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad \text{[sumando y restando } f(x_0+\Delta x, y_0)\text{]}$$

$$= [\, f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] + [\, f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)]$$ aplicando el

teorema del valor medio a cada corchete, se obtiene

$$\Delta z = \Delta x\, f_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y_0) + \Delta y\, f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2.\Delta y)$$

***Nota*: Función *z = f(x,y)* derivable equivale a que todas las derivadas parciales existen.**

5.1.1. Consecuencia del Teorema de los Incrementos Finitos

Una condición necesaria y suficiente para que *z = f(x,y)* con derivadas parciales acotadas en una región abierta R sea constante es que $\boxed{f_x(x,y)=0}$ y $\boxed{f_y(x,y)=0}$.

Demostración:

Del Teorema de los Incrementos Finitos $\Delta z = \Delta x\, f_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y_0) + \Delta y\, f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2.\Delta y)$

$$\Delta z = 0 \underset{por\ def\ \Delta z}{\longrightarrow} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0)$$

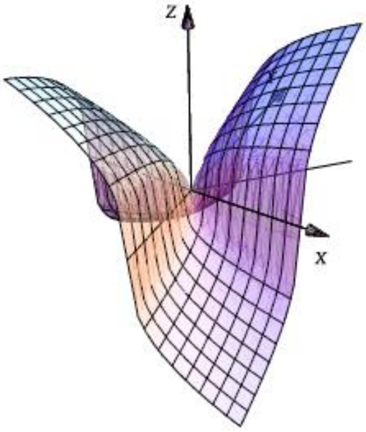
Recordemos que: en una variable la existencia de la derivada finita implica continuidad. Sin embargo en funciones de dos o más variables no basta la existencia de las derivadas primeras para asegurar la continuidad de la función.

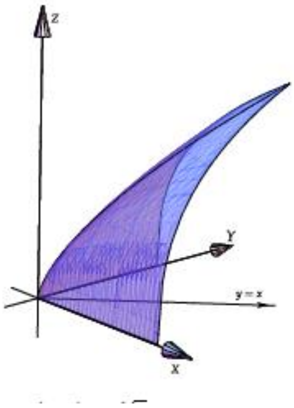
5.1.2. Derivadas parciales y continuidad

Una función *f (x, y)* puede tener derivadas parciales con respecto tanto a x como a y en un punto donde la función no sea continua. Esto es diferente de las funciones con una sola variable, donde la existencia de una derivada implica la continuidad. Sin embargo, si las derivadas parciales de *f (x, y)* existen y son continuas en todo un disco con centro en (x_0, y_0), entonces *f* es continua en (x_0, y_0), como veremos al final de esta sección.

Por ejemplo, si $f(x,y) = \sqrt[3]{x}\,.\sqrt[3]{y}$ entonces: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\,x^{2/3}}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\,y^{2/3}}$

En (0,0) las derivadas se deben calcular por definición: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, es decir las derivadas existen en (0,0). En esta situación podríamos esperar que si tenemos rectas tangentes con pendiente 0 en la dirección del eje *x* y del eje *y*, el plano tangente que contiene estas rectas es el plano *xy*, debería ser tangente a la gráfica de la función en ese punto, lo que no se observa en las gráficas.





Lo que este ejemplo sugiere es que necesitamos un requisito más fuerte para la derivabilidad en dimensiones superiores que la simple existencia de las derivadas parciales.
Se estudiará un concepto fundamental en la teoría de funciones de varias variables.

6. FUNCION DIFERENCIABLE

Las funciones importantes a estudiar, bajo la óptica del cálculo, son las funciones diferenciables. La noción de diferenciabilidad para funciones de una variable equivale a existencia de la derivada.
Cuando se tiene una función de una variable diferenciable, lo importante es obtener información de la función a partir de su derivada (la información que se obtiene de f a partir del valor de $f'(x_0)$ es local, alrededor de x_0). Por ejemplo, el simple hecho de la existencia de $f'(x_0)$ nos habla del comportamiento suave de la gráfica de la función en los alrededores del punto $(x_0, f(x_0))$; el signo de $f'(x_0)$ nos habla del crecimiento y/o decrecimiento de la función alrededor del punto, etc.
Resulta deseable, por tanto, disponer de un concepto de "diferenciabilidad" para funciones de varias variables semejante a aquél que conocemos para funciones de una variable. Nos podríamos preguntar si la sola existencia de las derivadas parciales de una función de varias variables en un punto nos puede dar un concepto de diferenciabilidad como el requerido. Sería bueno que esta fuera en verdad la definición que buscamos.
Sin embargo, este anhelo pronto se viene abajo pues es fácil convencerse que la existencia de las derivadas parciales de una función, (siendo una condición necesaria) está muy lejos de ser una condición suficiente para que la función sea diferenciable en el sentido buscado.
Para poder ver esto, recordemos que, en el caso de funciones de una variable, la diferenciabilidad de una función en un punto implica la continuidad de la función en ese punto. De modo que, en el caso de varias variables, la noción de diferenciabilidad (que procuramos sea equivalente al caso de una variable, que tenga las mismas propiedades) que buscamos, debe respetar esta propiedad (i.e. diferenciabilidad debe implicar continuidad). El ejemplo de la sección anterior nos desengaña sobre la posible validez de la definición establecida anteriormente.

6.1. Definición

Una función dada por $z = f(x,y)$ es ***diferenciable*** en $P_0 = (x_0, y_0)$ si existe un U(P_0 , δ) tal que para todo punto $P(x , y)$ perteneciente a U(P_0 ,δ), Δz puede expresarse en la forma

$$\boxed{\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}$$

donde ambos ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ siempre que existan f_x y f_y en P_0.

Si una función es diferenciable en un punto, el incremento de la misma puede expresarse como combinación lineal de los incrementos independientes más un cierto infinitésimo.

Observaciones:

1- Se puede escribir $\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + O(\rho)$, donde $O(\rho) = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$ y $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

2- La función $f(x,y)$ es diferenciable en la región R si es diferenciable en todo punto de R.

6.2. Condición Suficiente de Diferenciabilidad

Teorema: Si $z = f(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas en todos los puntos de una región abierta entonces es diferenciable en dichos puntos.

Demostración: Por la Primera Fórmula de Lagrange Δz es:

$$\Delta z = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y \qquad (1)$$

Como f_x y f_y son continuas en R tenemos:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0) = f_x(x_0, y_0),$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} f_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f_y(x_0, y_0)$$

Por un teorema anterior se sabe que la función difiere del límite en un infinitésimo

$$f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0) = f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1 \qquad (2)$$
$$f_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2 \qquad (3)$$

reemplazando (2) y (3) en (1) obtenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta z = (f_x(x_0 ,y_0) + \varepsilon_1)\Delta x + (f_y(x_0 ,y_0) + \varepsilon_2)\Delta y \\ \Delta z = f_x(x_0 ,y_0)\Delta x + f_y(x_0 ,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y\end{array}}$$

Nota: El reciproco no es cierto, pues, existen funciones diferenciables en un punto que no tienen derivadas parciales continuas en dicho punto. Es una condición suficiente pero no necesaria.
Este teorema es mucho más fácil de aplicar que la definición de función diferenciable para demostrar la diferenciabilidad de *f(x,y)* por lo que se usa en la ejercitación.

Corolario:

Si *z = f (x,y)* admite derivadas parciales continuas en una región abierta R, entonces la función es continua en todo punto de R.

Lema de función diferenciable

Toda función diferenciable es continua y derivable.

Esto significa que la gráfica de la función es una superficie suave.
Nota: la recíproca de este Lema no vale.

Entonces:

$\boxed{f_x \text{ y } f_y \text{ continuas}}$ ⟹ $\boxed{\text{f(x,y) diferenciable}}$ ⟹ $\boxed{f(x,y) \text{ continua}}$

Ejercicio: ¿Puede aplicar el teorema anterior para $f(x,y) = \dfrac{y}{y-x}$ en los puntos $A(2,1)$ y $B(0,0)$? Justifique su respuesta.

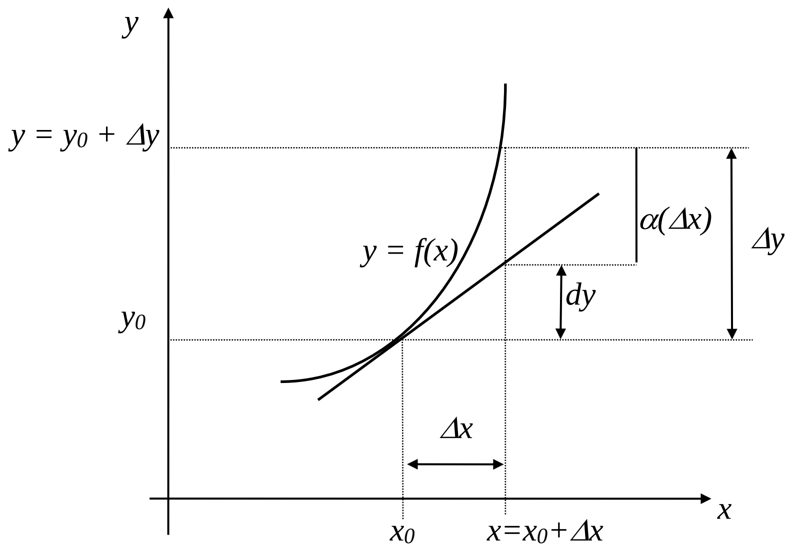
6.3. DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN

El diferencial es un objeto matemático que representa la parte principal del cambio en la aproximación lineal de una función con respecto a cambios en la variable independiente. **Mide el cambio aproximado de una función.** Sirven también para calcular el error máximo cometido en los cálculos, por lo que son de gran utilidad dentro de la industria cuando se trata de medir errores en los procesos productivos.

Recordemos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \;\rightarrow\; \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$ por lo tanto $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\,\Delta x$

denominando diferencial a la parte principal $dy = f'(x)\Delta x$.

Luego $\Delta y = dy + \alpha\,\Delta x$; por lo que $\Delta y \cong dy$



Se verá la definición del diferencial de una función de dos variables.

6.3.1. DEFINICIÓN DE DIFERENCIAL

A partir del concepto de **función diferenciable** $\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + O(\rho)$, la parte principal de esta ecuación se denomina diferencial total y se designa por el símbolo ***dz*** o ***df***

Se puede escribir $\Delta z = \underbrace{f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y}_{dz} + O(\rho) = dz + O(\rho)$ por lo tanto $\Delta z \cong dz$

Se sabe que para las variables independientes $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Entonces la expresión del diferencial total toma la forma:

$$\boxed{dz = f_x(P_0)\,dx + f_y(P_0)\,dy}$$

Ejemplo:

a) Calcular el diferencial de $z = f(x,y) = x^3 y + 6 x y^2$

b) Calcular el mismo en P_0 (1,1)

Solución:

a) $dz = f_x\,dx + f_y\,dy$

$z_x = f_x = 3x^2 y + 6y^2$; $z_y = f_y = x^3 + 12xy$ luego

$$dz = (3x^2 y + 6y^2)\,dx + (x^3 + 12xy)\,dy$$

b) Se calculan las derivadas en el punto P_0 (1,1)

$z_x\big|_{P_0} = 9$; $z_y\big|_{P_0} = 13$; $z(P_0) = f(1,1) = 7$ luego

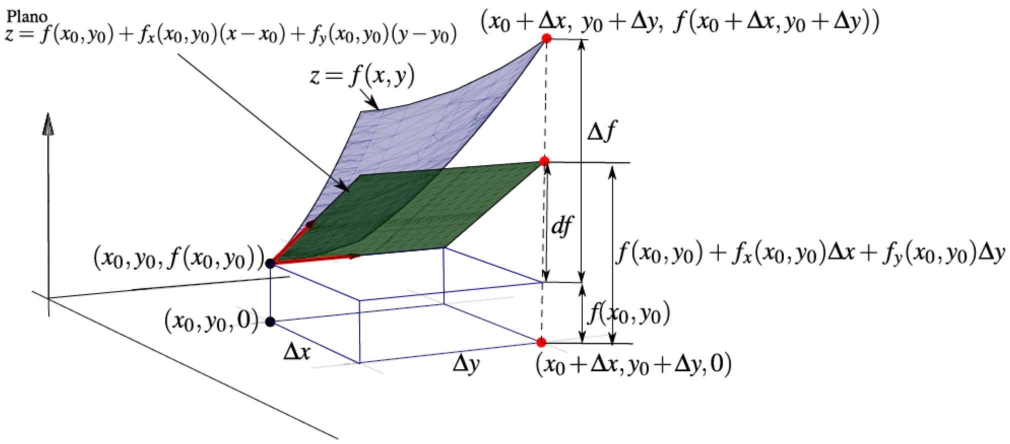
$$dz = 9\,dx + 13\,dy$$

6.3.2. Significado geométrico del diferencial

En tres dimensiones el análogo de una recta tangente a una curva es un plano tangente a una superficie.
Dada la función uniforme $z = f(x, y)$, diferenciable en (x_0, y_0), el incremento total es $\Delta z = dz + o(\rho)$. Reemplazando dz queda, como aproximación lineal:

$$\boxed{z - z_0 = f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0),}$$

que es la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0):

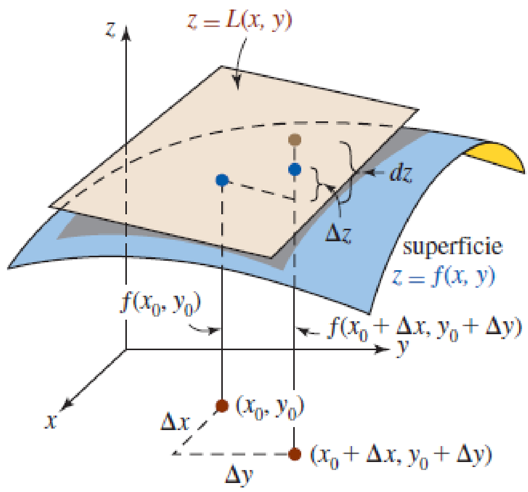


Geométricamente se caracteriza por el hecho de que la coordenada z de los puntos del plano tangente difieren de la coordenada z de la superficie en un infinitésimo de orden superior a ρ.
Los parámetros directores de la recta normal al plano tangente, llamada **recta normal a la superficie** es:

$$z_x(P_0);\quad z_y(P_0);\quad -1\cdot$$

Así la ecuación de la recta normal es

$$\boxed{\frac{x - x_0}{z_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{z_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{-1}}$$



Interpretaciones geométricas de dx, dy, Δz y dz

Nota
La condición necesaria y suficiente para que la superficie $z = f(x, y)$ admita plano tangente en un punto es que la función sea diferenciable en ese punto.

Ejemplo: Hallar la ecuación del plano tangente a $z = 2x + y^2$ en el $P(2,3)$ y la ecuación de la recta normal en dicho punto.

Solución: $z - z_0 = z_x(P_0)\ (x - x_0) + z_y(P_0)\ (y - y_0)$

$z_x\big|_P = 2$, $z_y\big|_P = 2y\big|_P = 6$, luego

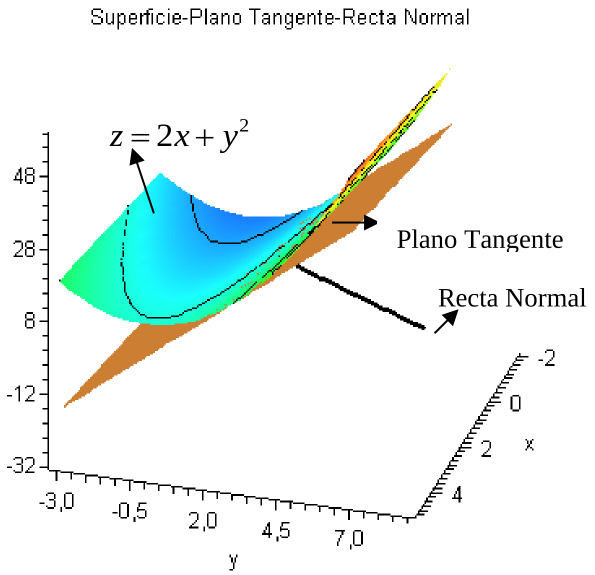
$z - z_0 = 2(x-2) + 6(y-3) = 2x - 4 + 6y - 18$, $z - z_0 = 2x + 6y - 22$

$z_0 = f\left(x_0, y_0\right) = 2x2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$, por lo que la ecuación del plano tangente es

$z - 13 = 2x + 6y - 22 \quad \rightarrow \quad z - 2x - 6y = -9$ Plano tangente

Luego la ecuación de la recta normal es: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{6} = \dfrac{z-13}{-1}$

Se grafica la Superficie con el Plano tangente y la Recta Normal con un software matemático.



6.3.3. Diferenciales sucesivos

Sea $z = f(x, y)$ sabemos que el diferencial de $z = f(x, y)$ es:

$$dz = df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

Si se cumplen las condiciones del Teorema de Bonnet y teniendo en cuenta la conmutabilidad de las derivadas segundas vamos a obtener la expresión del $d^2 f$

$$d^2 f = d\,(df(x,y)) = d\left[f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy\right] = d(f_x(x,y))dx + d(f_y(x,y))dy =$$

$$= \left[f_{xx}(x,y)\,dx + f_{xy}(x,y)\,dy\right]dx + \left[f_{yx}(x,y)\,dx + f_{yy}(x,y)\,dy\right]dy$$

Luego como $f_{xy} = f_{yx}$

$$d^2 f = f_{xx}(x,y)\,dx^2 + 2\; f_{xy}(x,y)\; dx\; dy + f_{yy}(x,y)\,dy^2$$

Se puede escribir:

$$d^2 f = \left(dx\ \frac{\partial}{\partial x} + dy\ \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(2)} f(x,y)$$

donde el exponente simbólico (2) indica que se debe reemplazar las potencias y productos de los símbolos de Jacobi por índices de derivación.
En general, si existen y son continuas las derivadas n-ésimas en el punto considerado, se tendrá:

$$\boxed{d^n f = \left(dx\ \frac{\partial}{\partial x} + dy\ \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n)} f(x,y)}$$

donde se aplica, con la convención anterior, el desarrollo de potencias de un binomio.

Ejemplo: Calcular $d^2 f$ **, si** $z = f(x,y) = 2x + y^2$
En primer lugar se calculan las derivadas parciales de la función dada

$z_x = f_x = 2$; $z_y = f_y = 2y$;
$z_{xx} = f_{xx} = 0$; $z_{xy} = f_{xy} = 0$; $z_{yy} = f_{yy} = 2$

El diferencial segundo de f es $d^2 f = f_{xx}\, dx^2 + 2 f_{xy}\, dx\, dy + f_{yy}\, dy^2$, reemplazando las derivadas parciales se obtiene finalmente

$$d^2 f = 0dx^2 + 0dx\, dy + 2\, dy^2 = 2\, dy^2 .$$

Ejemplo: Suponga que una compañía fabrica tanques cilíndricos circulares rectos para almacenar glucosa que miden 2,5 m de altura y 0,5 m de radio. ¿Qué tan sensibles son los volúmenes de los tanques a pequeñas variaciones en la altura y el radio?

Con $V = \pi r^2 h$, la diferencial total da la aproximación del cambio en el volumen.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\, dr + \frac{\partial V}{\partial h}\, dh$$

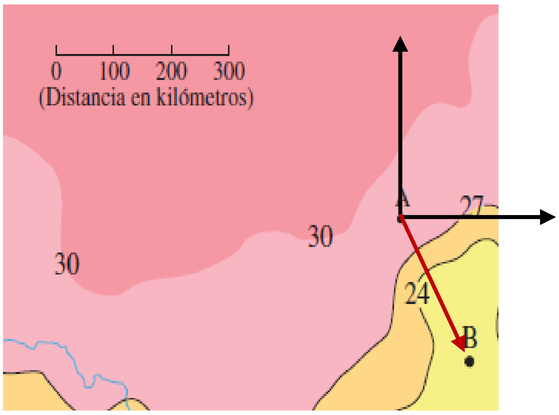
$$dV = 2\, \pi\, r\, h\, dr + \pi\, r^2\, dh$$

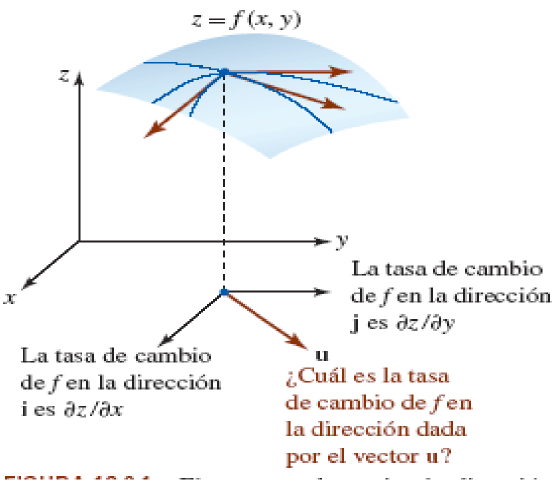
$$dV(2{,}5\, , 0{,}5) = 7{,}85\, dr + 0{,}785\, dh$$

Por lo tanto, el cambio de una unidad en r modificará a V alrededor de 7,85 unidades. El cambio de una unidad en h cambia V alrededor de 0,785 unidades. El volumen del tanque es 10 veces más sensible a un cambio pequeño en r que a un pequeño cambio de igual tamaño en h. El ingeniero de control de calidad, encargado de garantizar que los tanques tengan el volumen correcto, pondrá especial atención a sus radios.

7. DERIVADA DIRECCIONAL

La figura muestra un mapa de contorno de la función de temperatura representada por *T(x,y)*. Si estamos ubicados en el punto A y calculamos la derivada parcial de *T* en la variable *x*, *Tx* , es la rapidez de cambio de la temperatura con respecto a la distancia, si nos movemos hacia el este. *Ty* es la rapidez de cambio de la temperatura si nos movemos al norte. Pero ¿qué pasa si queremos saber la rapidez de cambio de la temperatura cuando nos movemos del punto A al B?, en una dirección no paralela a un eje coordenado. Necesitamos aplicar el concepto de derivada direccional.





En esta grafica la *z= f(x,y)* es la función que puede representar la temperatura u otra magnitud de acuerdo al problema planteado, y se encuentran indicadas las direcciones de derivadas en x, en y, y una dirección que forma un ángulo θ con el eje x

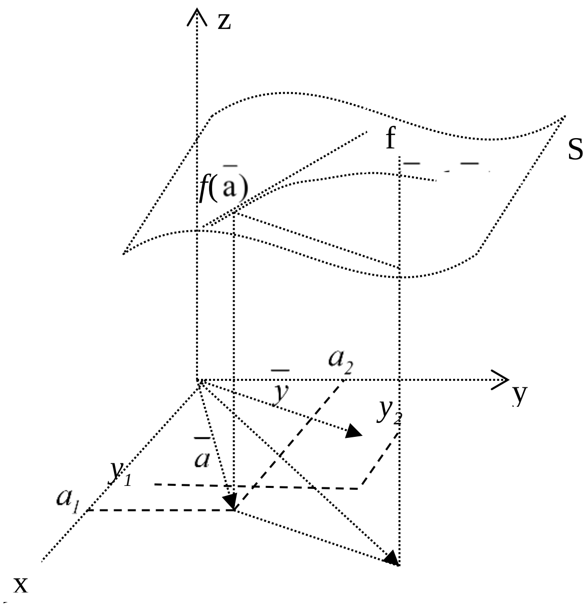
7.1. Derivada de un campo escalar en la dirección de un vector

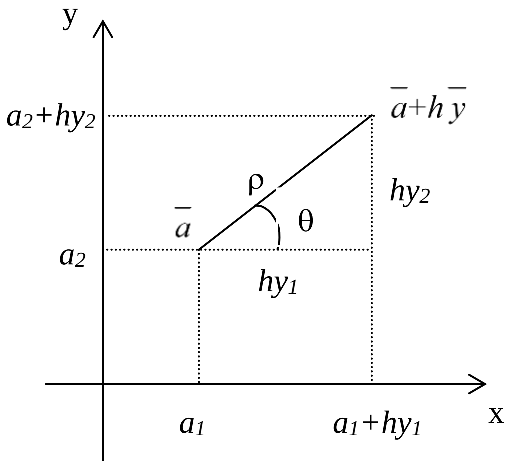
Sea $z = f(x,y)$ un campo escalar, $f : S \to \Re,\ con\ \ S \subset \Re^2$ y $\bar{a}$ un punto interior a S e $\bar{y}$ un vector arbitrario de $\Re^2$, que forma un ángulo θ con el eje x positivo.
La derivada del campo escalar *f* en el punto $\bar{a}$ con respecto a la dirección $\bar{y}$ se representa $f'(\bar{a},\bar{y})$ y se define como:

$$f'(\bar{a},\bar{y}) \underset{def}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{a}+h\bar{y}) - f(\bar{a})}{h} \qquad \textbf{(1)}$$

Otra notación para $f'(\bar{a},\bar{y})$ es: $f'(\bar{a},\bar{y}) = D_\theta f(\bar{a}) = D_{\bar{y}_\theta} f(\bar{a})$

Del dibujo $h\ y_1 = \rho\ cos\theta,\quad h\ y_2 = \rho\ sen\theta$





$hy_1 = \Delta x = \rho\, cos\theta$

$hy_2 = \Delta y = \rho\, sen\theta$

remplazando en (1) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\bar{a} + h\bar{y}) - f(\bar{a})}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a_1 + hy_1, a_2 + hy_2) - f(a_1, a_2)}{h} =$

$$\boxed{\lim_{\rho \to 0} \frac{f(a_1 + \rho\ \ cos\theta, a_2 + \rho\ \ sen\theta) - f(a_1, a_2)}{\rho} = D_\theta\ f(\bar{a}) = D_{\bar{y}\theta}\ f(\bar{a})}$$

Es la derivada de $f(\bar{a})$según la dirección θ o según el vector $\bar{y}_\theta$ ·.

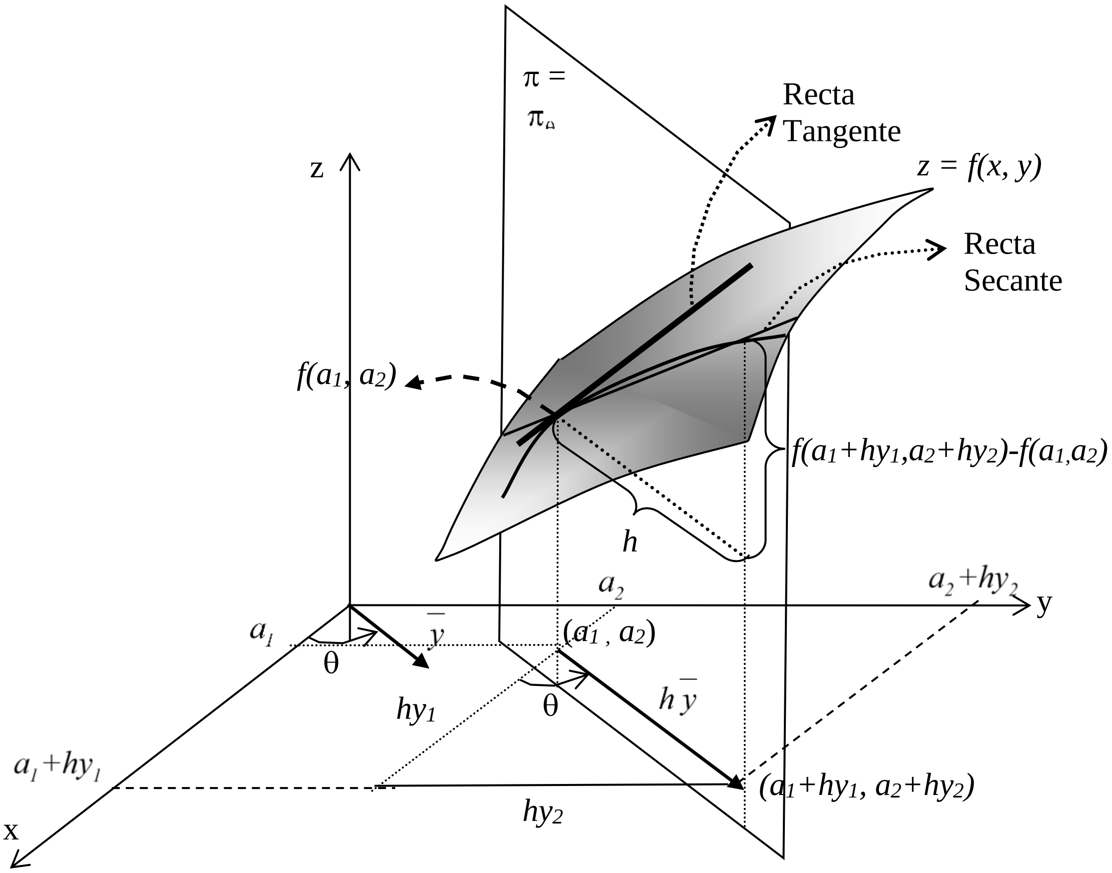
Observar que en una misma dirección hay infinitos vectores, si el vector es $\bar{y}_\theta = (cos\theta\ , sen\theta\ )$ tiene norma uno (se lo denomina versor pues $\| \bar{y}_\theta \| = 1$), y es el más representativo de la dirección, y la derivada se llama **derivada direccional**.

7.2 Significado Geométrico

La derivada direccional es la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie con el plano que tiene una inclinación θ con el eje de las x.

Cuando definimos derivadas parciales consideramos planos en posiciones muy particulares, uno paralelo al plano xz para definir f_x, otro paralelo a yz para definir a f_y.

Para definir la $D_\theta\ f(\bar{a})$consideramos un plano vertical pero que forma un ángulo θcon el eje de las x.



Ejemplo:

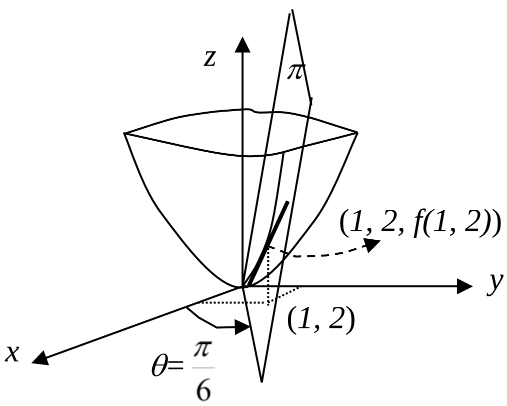
Calcular la derivada direccional de $z = 2x^2 + y^2$ en la dirección $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ en el punto $\bar{a} = (1,2)$.

Si se utiliza la definición, se calcula el siguiente límite

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_0 + \rho \cos\theta, y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta) - f(x_0, y_0)}{\rho} = \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho, 2 + \frac{1}{2}\rho\right) - f(1,2)}{\rho} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\rho\right)^2 - 6}{\rho} =$$



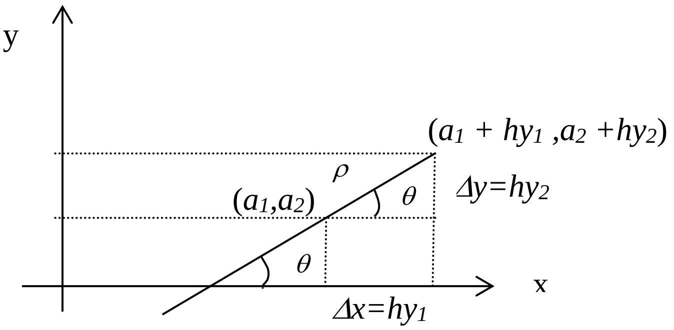
$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \left[\cancel{2} + 2\sqrt{3}\rho + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 + \cancel{4} + 2\rho + \frac{1}{4}\rho^2 - \cancel{6} \right] = 2\sqrt{3} + 2 = D_\theta f(1,2)$$

7.3 Derivada direccional de una función diferenciable

Si $z = f(x,y)$ es diferenciable en $P_0 = (x_0, y_0) = \bar{a}$ entonces por definición:

$$\Delta z = f_x(\bar{a})\Delta_x + f_y(\bar{a})\Delta_y + o(p) \qquad (1)$$

En nuestro caso:
$$h\, y_1 = \Delta x = \rho \cos\theta$$
$$h\, y_2 = \Delta y = \rho\, sen\theta$$



Reemplazando en **(1)**

$$\Delta z = f_x(\bar{a})\rho \cos\theta + f_y(\bar{a})\rho\, sen\theta + o(\rho)$$

Sabemos que $D_{\bar{y}_\theta} f(\bar{a}) = \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\Delta z}{\rho}$

de donde $$D_{\bar{y}_\theta} f(\bar{a}) = \lim_{\rho \to 0} \frac{f_x(\bar{a})\,\rho\cos\theta + f_y(\bar{a})\,\rho\, sen\theta + o(\rho)}{\rho}$$

luego $$D_{\bar{y}_\theta} f(\bar{a}) = f_x(\bar{a})\cos\theta + f_y(\bar{a})\, sen\theta \;; \qquad \text{pues } \lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$$

Se puede escribir la derivada direccional de una función diferenciable como el producto escalar de dos vectores:

$$\boxed{D_{\bar{y}_\theta} f(\bar{a}) = (f_x(\bar{a}), f_y(\bar{a})).\,(\overbrace{\cos\theta}^{y_1}, \overbrace{sen\theta}^{y_2}) = \bar{\nabla} f(\bar{a}).\bar{y}_\theta \qquad \textit{Notación Vectorial} \text{ ó}}$$

$$D_{\bar{y}_\theta} f(\bar{a}) = \begin{bmatrix} f_x(\bar{a}) & f_y(\bar{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{\textit{Notación Matricial}}$$

El primer vector de este producto se presenta no solo al calcular derivadas direccionales sino también en muchos otros contextos. En consecuencia, tiene un nombre especial:
EL GRADIENTE DE *f(x,y)* y una notación especial, *grad f(x,y)* o $\nabla f(x,y)$.

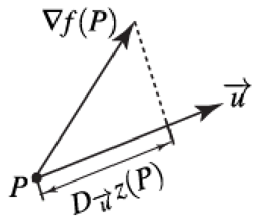
El vector que da la dirección es un vector unitario (versor)

$$\bar{y}_\theta = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (y_1, y_2) \quad \text{por lo que} \quad \|\bar{y}_\theta\| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1 .$$

Concluimos que la **derivada direccional de una función** $z = f(x,y)$ **diferenciable se calcula**:

En notación vectorial: $\boxed{D_{\bar{y}_\theta} f(\bar{a}) = \overline{\nabla} f(\bar{a}) \cdot \bar{y}_\theta}$

Esta expresión nos dice que la derivada direccional es la componente del vector gradiente $\overline{\nabla} f(\bar{a})$ en la dirección del vector $\bar{y}_\theta$.



Componente: recordemos que la componente de $\vec{v}$ en la dirección de $\vec{u}$ es $\frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|}$ esta componente es la longitud de la proyección vectorial de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, $proy_{\vec{u}}^{\vec{v}} = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|}.\vec{u}$ Con lo cual la fómula:

$$D_{\overrightarrow{y\theta}}\, f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}).\overrightarrow{y_\theta} = \nabla f(\vec{a}).\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

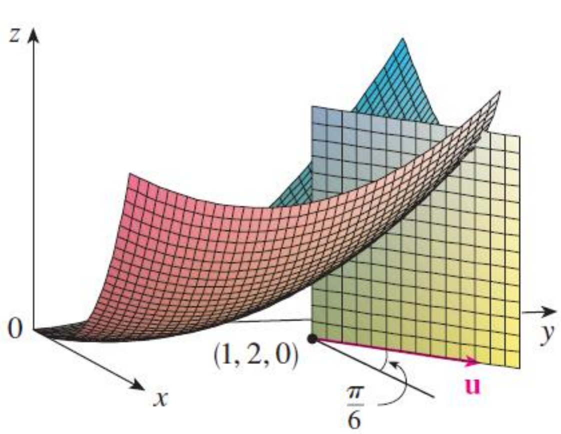
nos dice que la derivada direccional es la componente del vector gradiente en la dirección del vector $\overrightarrow{y_\theta}$

En notación matricial: $\boxed{D_{y_\theta} f(\bar{a}) = [\, f_x(\bar{a}) \quad f_y(\bar{a})] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}$

Ejemplo: Encuentre la derivada direccional $D_u f(x,y)$ si $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$, en el punto (1,2), siendo **u** el vector unitario dado por el ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$.

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y).\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x,y).sen\,\frac{\pi}{6}$$

$$D_u f(x,y) = (3x^2 - 3y).\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y).\frac{1}{2}$$



$$D_u f(1,2) = \left(3\sqrt{3}\,(1)^2 - 3(1)\right) + \left(8 - 3\sqrt{3}\,(2)\right) = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

La derivada direccional representa la rapidez de cambio de z en la dirección de **u**. Esta es la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie z y el plano vertical que pasa por el punto (1,2,0) en la dirección de **u**.

8. VECTOR GRADIENTE

8.1. Definición

Dada un campo escalar $z = f(x,y)$ diferenciable en (x_0, y_0), llamamos gradiente de f en (x_0, y_0) al vector

$$\boxed{grad\ f = \overline{\nabla} f(P_0) = f_x(x_0,y_0)\,\bar{i} + f_y(x_0,y_0)\,\bar{j}}$$

Sí $u = u(x,y,z)$ campo escalar y $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ entonces el gradiente de u es

$$\boxed{grad\, u = \overline{\nabla} u(Po) = u_x(Po)\bar{i} + u_y(Po)\bar{j} + u_z(Po)\bar{k}}$$

El **símbolo ∇** es una delta griega mayúscula invertida, que se denomina nabla. El símbolo suele leerse "grad f ". La palabra gradiente se refiere a la variación de una magnitud en función de una distancia. La interpretación física del gradiente es: En cada punto P_0 , el gradiente describe como el campo escalar $z = f(x,y)$ cambia con la posición.

Ejemplo: Sea $z = x^3.\ e^{-y}$, hallar el gradiente de z.

Sabemos que $grad\ z = \overline{\nabla} f(P_0) = f_x(x_0,y_0)\,\bar{i} + f_y(x_0,y_0)\,\bar{j}$, se calculan las derivadas

parciales $z_x = 3x^2.\ e^{-y}$; $z_y = x^3\,(-1)\,e^{-y} = -x^3\,e^{-y}$, por lo que el gradiente es

$$\vec{\nabla} z = 3x^2\ e^{-y}\ \vec{i} - x^3\ e^{-y}\ \vec{j} = (3x^2\ \vec{i} - x^3\ \vec{j})\,e^{-y}$$

Ejemplo: Calcular la derivada direccional de $z = 2x^2 + y^2$, $\bar{a} = (1,2)$ $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Como la función del ejemplo anterior es diferenciable se puede calcular: $D_{\bar{y}_\theta} f(\bar{a}) = \overline{\nabla} f(\bar{a}) \cdot \bar{y}_\theta$

Se obtiene las derivadas parciales: $f_x = 4x\big|_P = 4$

$f_y = 2y\big|_P = 4$

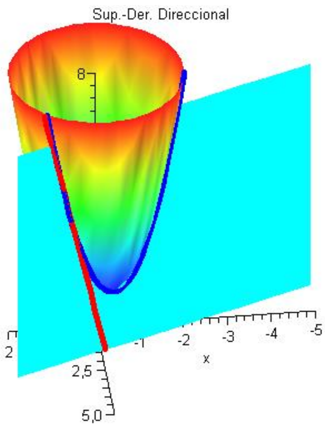
Luego los valores del seno y coseno en el ángulo dado, todo para reemplazar en la fórmula de derivada direccional.

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y} \qquad sen\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

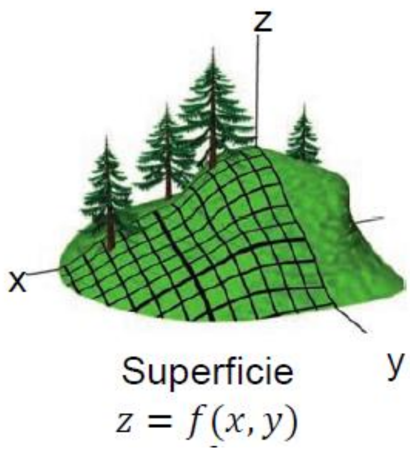
reemplazando se obtiene:

$$D_{\bar{y}\theta}f(1,2)=\bar{\nabla}f(P_0)\cdot\bar{y}_\theta=(4\bar{i}+4\bar{j})\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i}+\frac{1}{2}\bar{j}\right)=2\sqrt{3}+2$$

El gráfico muestra la superficie, el plano de inclinación $\theta=\frac{\pi}{6}$ paralelo al eje z y la recta tangente a la curva intersección de las anteriores superficies en el punto $(1,2,6)$.



Ejemplo: La elevación de una montaña sobre el nivel del mar en (x,y) es $3000\, e^{\frac{-(x^2+2y^2)}{100}}$ m. El eje x positivo apunta hacia el este y el eje y hacia el norte. Un montañista esta directamente sobre las coordenadas (10,10). Si se mueve hacia el norte ¿ascenderá o descenderá y con que pendiente? ¿Si se mueve en la dirección Noreste que ocurre?



$$D_\theta f(x,y) = \nabla f(x,y).\bar{v}_\theta$$

$$fx=-3000.e^{\frac{-(x^2+2y^2)}{100}}.\frac{x}{50}\bigg|_{(10,10)}=-30$$

$$fy=-3000.e^{\frac{-(x^2+2y^2)}{100}}.\frac{y}{25}\bigg|_{(10,10)}=-6$$

$$\nabla f(10,10) = -30\bar{\imath}-6\bar{\jmath}$$

La dirección hacia el norte es el versor : $\bar{v}=0\bar{\imath}+1\bar{\jmath}$

$$D_\theta f(10,10) = \nabla f(10,10).(0,1) = \mathbf{-6}$$

Desciende con una pendiente de 6

La dirección noreste se representa por el versor : $\bar{v} = 1\bar{\imath} + 1\bar{\jmath}$

$D_{\theta}f(10{,}10) = \nabla f(10{,}10).(1{,}1) = \mathbf{-36}$

Desciende con una pendiente de 36.
Más rápido que si se dirige al norte

8.2. Relación entre derivada direccional y derivada parcial

Veamos la relación entre derivada direccional y derivada parcial.

- **Sí** $\theta = 0^{\circ}$

O sea $\bar{y}_{\theta} = \bar{e}_1 = (1{,}0)$ versor en la dirección del eje x

$$D_{\bar{y}_{\theta}} f(\bar{a}) = f'(\bar{a},\bar{y}_{\theta}) = f'(\bar{a},\bar{e}_1) \underset{f.\ diferenciable}{=} \bar{\nabla} f(\bar{a})\cdot \bar{e}_1 = (f_x(\bar{a}),\ f_y(\bar{a}))\cdot(1{,}0) = f_x(\bar{a})$$

Es la derivada parcial **de *f* respecto de *x*.**

- **Sí** $\theta = 90^{\circ}$

Luego $\bar{y}_{\theta} = \bar{e}_2 = (0{,}1)$ versor en la dirección del eje y

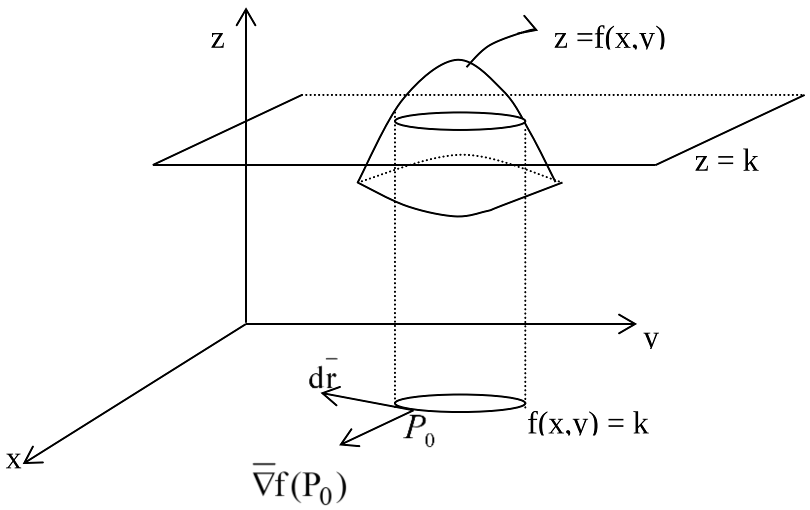
$$D_{\bar{y}_{\theta}} f(\bar{a}) = f'(\bar{a},\bar{y}_{\theta}) = f'(\bar{a},\bar{e}_2) = \bar{\nabla} f(\bar{a})\cdot \bar{e}_2 = (f_x(\bar{a}),\ f_y(\bar{a}))\cdot(0{,}1) = f_y(\bar{a})$$

Obtenemos así la derivada parcial **de *f* respecto de y**.

8.3. Propiedades del vector gradiente

1) Sea $f : \Re^2 \to \Re$ y (x_0, y_0) un punto en la curva de nivel C, definida por $f(x,y) = k$; donde k = constante. Entonces $\bar{\nabla} f(x_0, y_0)$ es normal a C, siempre que este exista.

Demostración:



De: $\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = k \end{cases} \rightarrow f(x,y) = k$ (curva de nivel)

Si la curva de nivel se expresa en coordenadas paramétricas:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \rightarrow f\big(x(t), y(t)\big) = c$$

El vector posición es: $\bar{r}(t) = x(t)\bar{\imath} + y(t)\bar{\jmath}$ y $\vec{dr} = dx\ \vec{i} + dy\ \bar{j}$ un vector desplazamiento de la curva de nivel.

Luego $dz = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy = 0$ por ser $z=k$

Utilizando producto escalar entre dos vectores

$dz = (f_x(P_0)\ ,\ f_y(P_0)) \cdot (dx\ , dy) = 0$, lo que se expresa como $\overline{\nabla} f(P_0) \cdot d\bar{r} = 0$
por lo que $\overline{\nabla} f(P_0) \perp d\bar{r}$, significa que el vector gradiente es **perpendicular** a la curva de nivel.

2) La derivada direccional adquiere su valor máximo en la dirección y sentido del gradiente. Sea $z = f(x,y)$ función diferenciable. $D_{\bar{y}_\theta} f(P_0) = \overline{\nabla} f(P_0) \cdot \bar{y}_\theta$

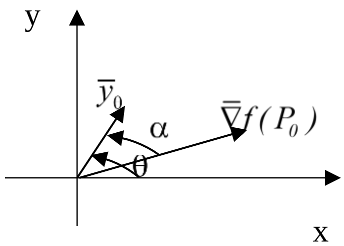
$$D_{\bar{y}_\theta} f(P_0) = \overline{\nabla} f(P_0) \cdot \bar{y}_\theta \underset{\text{def. producto escalar}}{=} \left\|\overline{\nabla} f(P_0)\right\| \left\|\bar{y}_\theta\right\| \cos(\overline{\nabla} f, \bar{y}_\theta)$$

$$D_{\bar{y}_\theta} f(P_0) = \overline{\nabla} f(P_0) \cdot \bar{y}_\theta = \left\|\vec{\nabla} f(P_0)\right\| \left\|\bar{y}_\theta\right\| \cos\alpha$$

Como $\bar{y}_\theta$ es un versor, luego $\left\|\bar{y}_\theta\right\| = 1$

Luego:

$$\boxed{D_{\bar{y}_\theta} f(P_0) = \left\|\overline{\nabla} f(P_0)\right\| \cos\alpha}$$



α: ángulo entre $\overline{\nabla} f$ y $\bar{y}_0$

Este valor es máximo si cos α = 1 es decir cuando α = 0 y dicho valor máximo es

$$D_{y_\theta} f(P_0) = \left\|\overline{\nabla} f(P_0)\right\| = \sqrt{f_x^{\,2}(P_0) + f_y^{\,2}(P_0)}$$

Si α = π entonces cos α = -1 y $D_{\bar{y}_\theta} f(P_0) = -\left\|\overline{\nabla} f(P_0)\right\|$ es el valor mínimo

Resumiendo

2.a) La $D_{\bar{y}_\theta} f(P_0)$ es ***máxima*** en la **dirección y sentido** del gradiente. En cada punto P de su dominio, la función crece más rápidamente en la dirección y sentido del vector gradiente.

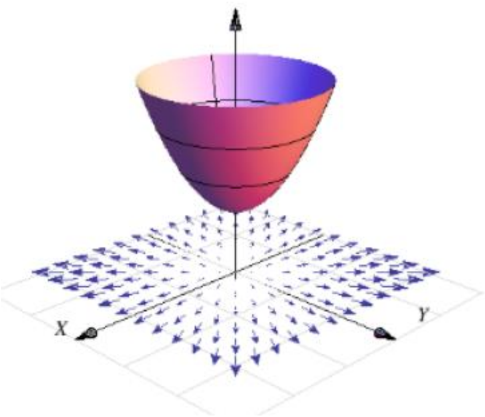
2.b) La $D_{\bar{y}_\theta} f(P_0)$ es ***mínima*** en la **dirección y sentido opuesto** al gradiente.

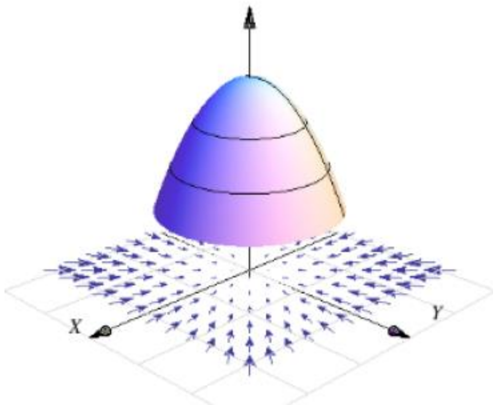
Por ejemplo, si se observa el escurrimiento del agua al descender por la ladera de una montaña, esta sigue la trayectoria en la dirección de máxima pendiente. Se observa que en cada punto de la trayectoria la dirección es distinta.

8.4. Campo vectorial gradiente:

El gradiente $\nabla f: \Re^2 \to \Re^2$ es un campo vectorial, **el campo gradiente**. La palabra campo significa que ∇f asigna un vector a cada punto del dominio de *f*. Tiene un importante significado geométrico, muestra la dirección en que *f* crece más rápidamente y la dirección que es ortogonal a todas las curvas de nivel de *f*.

Por ejemplo, consideremos el paraboloide $\boldsymbol{z - 1 = x^2 + y^2}$, el campo gradiente de z es $\nabla z = 2x\bar{\imath} + 2y\bar{\jmath}$. La representación gráfica de la superficie y del campo gradiente se ve en la figura, los vectores apuntan en la dirección de crecimiento del paraboloide y la magnitud de esos vectores nos da una medida de la "intensidad" de esa razón o tasa de cambio.





Ahora consideremos el paraboloide $\boldsymbol{z - 3 = -x^2 - y^2}$

El campo gradiente de z es: $\nabla z = -2x\bar{\imath} - 2y\bar{\jmath}$

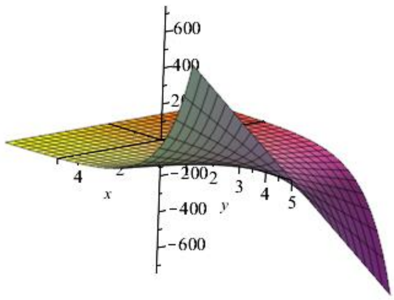
En la figura se observa que los vectores apuntan en la dirección de decrecimiento del paraboloide y la magnitud de esos vectores nos da la "intensidad" de la razón de cambio.

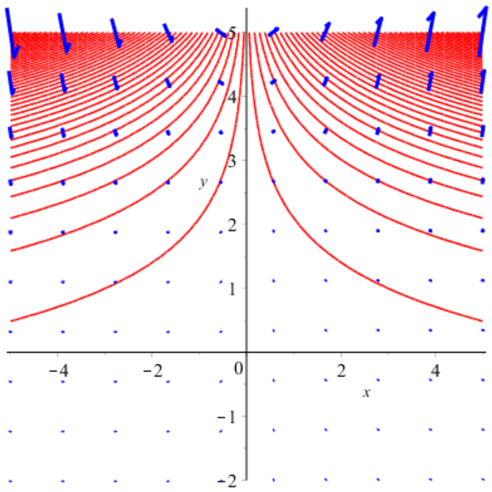
La *f(x,y)* se mantiene constante sobre las curvas de nivel, la dirección (un vector **u)** en la que el cambio (instantáneo) de f respecto a P es nulo es la dirección de un vector perpendicular al gradiente en P.

Las direcciones ortogonales al vector gradiente, son direcciones de cambio nulo (la función no crece ni decrece)

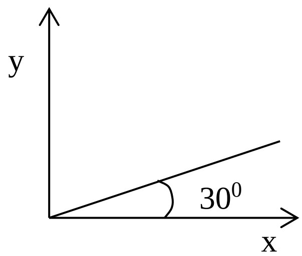
Ejemplo: Analizar la función $z = x\, e^y$

Observando la gráfica se puede ver la dirección en que crece la función, esto es en el sentido positivo de las x y de las y. En el mapa de contorno se encuentra también graficado el campo gradiente, poniendo de manifiesto que todos los vectores de él son perpendiculares a las curvas de nivel y apuntan en la dirección de máximo crecimiento de la función.





Ejemplo: Dado $u(x,y) = x^2 + xy + y^2$



a) Calcular en el punto (3,2) la derivada direccional en la dirección de 30° con el eje *x*.

b) Calcular el valor máximo de la derivada direccional.

Solución: a) $D_{\bar{y}_\theta} f(P_0) = \bar{\nabla} f(P_0) \cdot \bar{y}_\theta$

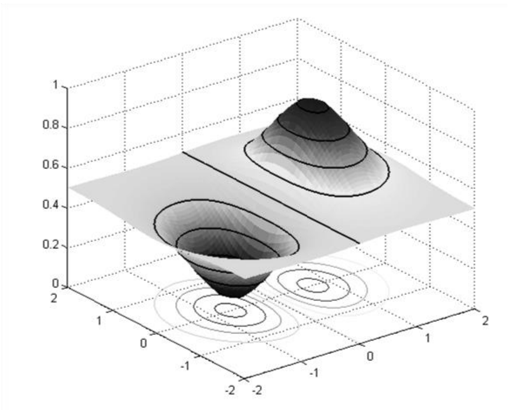
$\bar{\nabla} f = f_x \, \vec{i} + f_y \, \vec{j} = (2x + y)\, \vec{i} + (x + 2y)\, \vec{j}$, $\quad \bar{\nabla}(P_0) = 8\, \vec{i} + 7\, \vec{j}$;

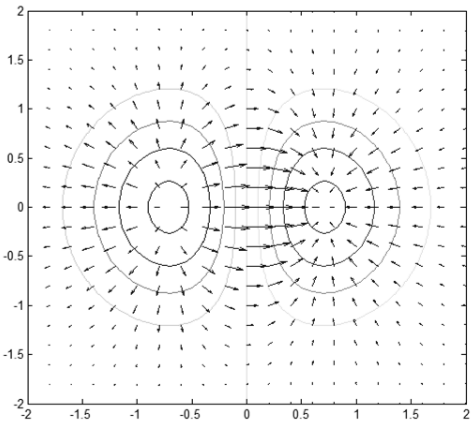
$\bar{y}_\theta = \cos\theta \, \vec{i} + sen\theta \, \vec{j} = \cos 30° \, \vec{i} + sen 30° \, \vec{j}$, luego $\bar{y}_\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}$, por lo que la derivada direccional es: $D_{\bar{y}_\theta} f(P_0) = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2} = 4\sqrt{3} + \frac{7}{2} = 10.42$

b) La derivada direccional máxima es: $D_{\bar{y}_\theta} f(P_0) = \left\| \bar{\nabla} f(P_0) \right\|$, en nuestro caso vale:

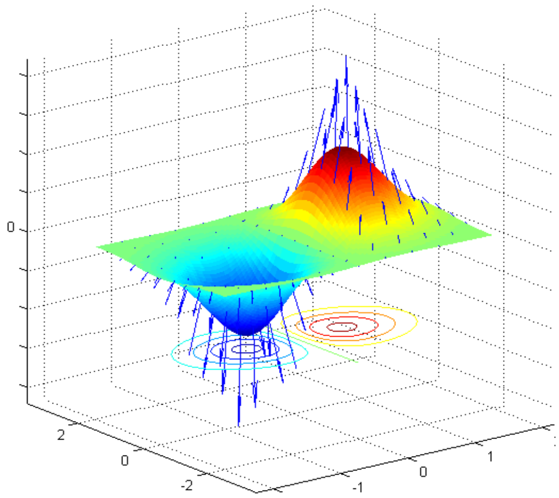
$$D_{\bar{y}_\theta} f(P_0) = \sqrt{64 + 49} = \sqrt{113} \approx 10.63$$

Ejemplo: Dada $z = x\, e^{\left(-x^2 - y^2\right)}$ graficar la función, las curvas de nivel y el campo gradiente correspondiente utilizando software científico.





Se puede visualizar en 3D.



Ejemplo: la temperatura en °C sobre la superficie de una placa metálica viene dada por: $T(x, y) = 20 - 4\,x^2 - y^2$ con x e y en cm.

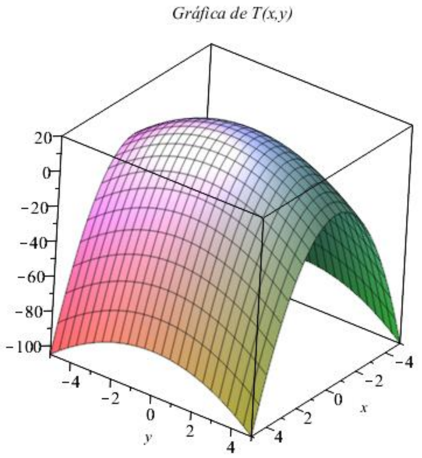
a) En el punto (2,-3) ¿en qué dirección crece más rápido la temperatura?

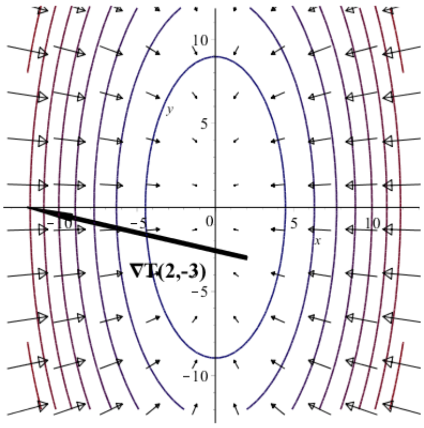
$$\nabla T(x, y) = -8\,x\,\bar{\imath} - 2\,y\,\bar{\jmath}$$

$$\nabla T(2, -3) = -16\,\bar{\imath} + 6\,\bar{\jmath}$$

b) ¿A qué ritmo se produce el crecimiento en el punto (2,-3)?

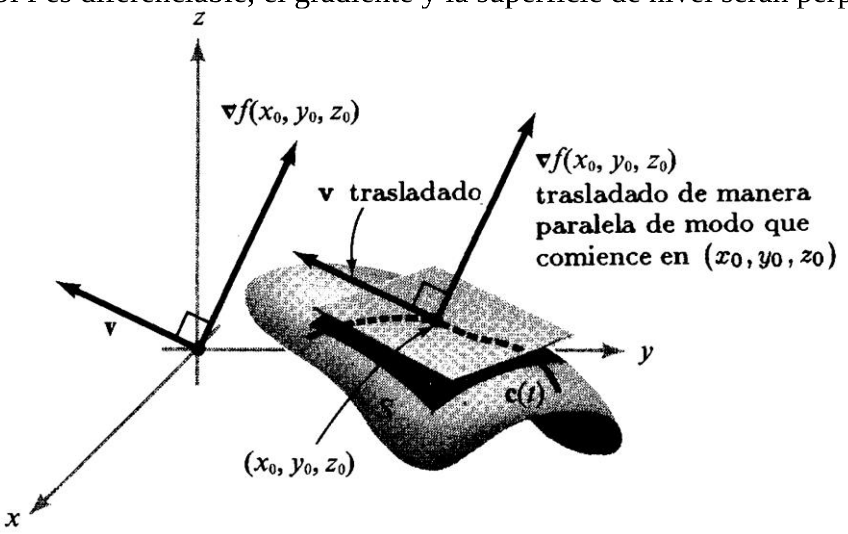
$|\nabla T(2, -3)| = \sqrt{16^2 + (-6)^2} = 17.09\ °C$ por cm





8.5. Relación del gradiente con la superficie

Sabemos que el gradiente de f(x,y) apunta en la dirección en la que los valores de f cambian más rápidamente, mientras que una superficie de nivel está en las direcciones en las esos valores no cambian. Si f es diferenciable, el gradiente y la superficie de nivel serán perpendiculares.



Ejemplo: Hallar el vector normal a la superficie S dada por $z = x^2y^2 + y + 1$ en el punto (0,0,1)

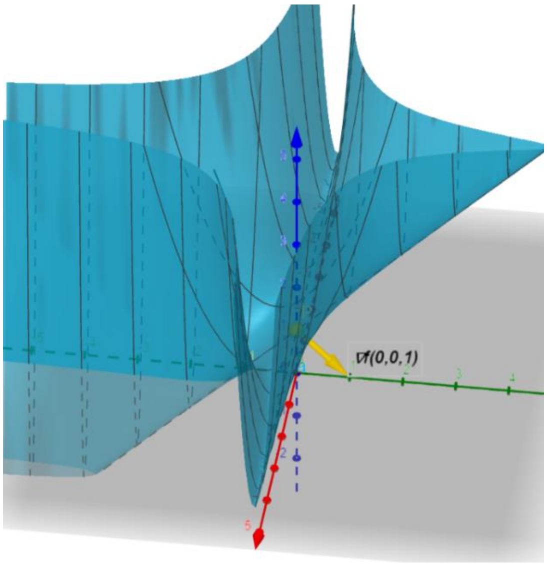
Sea $f(x, y, z) = x^2y^2 + y + 1 - z$. Considerar la superficie definida por *f(x,y,z) = 0.*

El gradiente de f es:

$$\nabla f(x, y, z) = f_x\,\bar{\imath} + f_y\,\bar{\jmath} + f_z\,\bar{k} = 2xy^2\bar{\imath} + (2x^2y + 1)\bar{\jmath} - \bar{k}$$

En el punto: $\nabla f(0,0,1) = \bar{\jmath} - \bar{k}$

Es el vector normal a S en el punto (0,0,1).



9. FUNCIONES COMPUESTAS

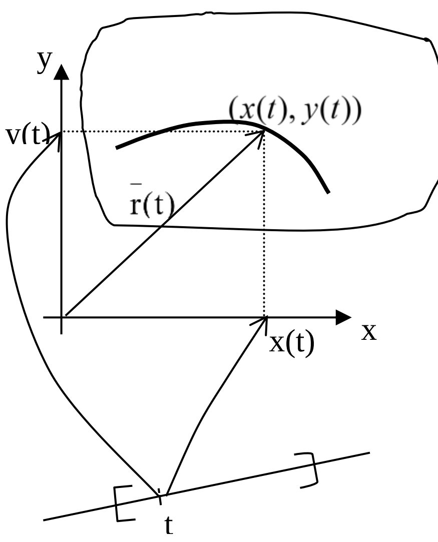
9.1. Función compuesta de una variable independiente

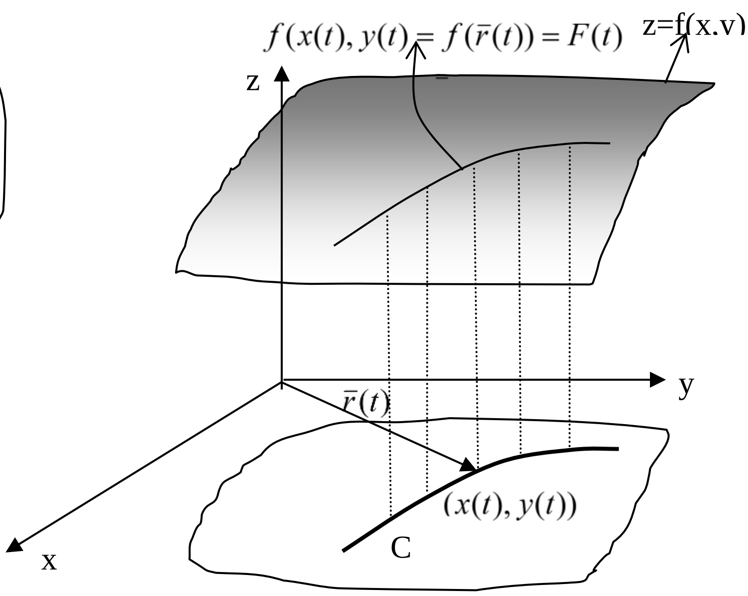
Sea $z = f(x, y)$ una función uniforme de dos variables y supongamos que *x* e *y* no sean ya variables independientes, sino función de una misma variable *t*, $x = x(t)$; $y = y(t)$.

Con estas condiciones a cada valor de *t* corresponde un punto $(x(t), y(t))$. En consecuencia

$\boxed{z = f(x(t), y(t)) = F(t)}$ **es una función compuesta de *t*.**

Las funciones $x = x(t)$; $y = y(t)$ definen en forma paramétrica una curva en el plano (*x*,*y*) cuyo vector posición es $\bar{r}(t) = x(t)\ \bar{i} + y(t)\ \vec{j}$ y $z = f(x, y) = f(x(t), y(t)) = f(\bar{r}(t))$ son los valores que toma la superficie sobre la curva *C*.





9.2. Regla de la Cadena.

La regla de la cadena tiene varias versiones, cada una de ellas, dando una regla para derivar una función compuesta de distinta forma.

9.2.1. Funciones compuestas de una variable independiente.

Teorema: Si $z = f(x,y)$ es **diferenciable** en (x_0, y_0) y las funciones *x(t), y(t)* son **derivables** en t_0. Entonces la función $z = f(x,y)$ es **derivable** en t_0 y su derivada es:

$$\boxed{z' = \frac{dz}{dt} = f_x(P_0)\cdot x'(t_0) + f_y(P_0)\cdot y'(t_0)}$$

Demostración: Si $z = f(x,y)$ es **diferenciable** entonces

$$\Delta z = f_x(P_0)\cdot \Delta x + f_y(P_0)\cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y$$

dividiendo por Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x(P_0)\cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(P_0)\cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Como ε_1 y ε_2 son infinitésimos en Δx y Δy lo son también en Δt, por lo tanto $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta t \to 0$

Luego tomando límite a ambos miembros nos queda:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(f_x(P_0)\cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(P_0)\cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$$

y dado que *x = x(t)* e *y = y(t)* son derivables en $t = t_0$, entonces

$$z' = \frac{dz}{dt} = f_x(P_0)\cdot x'(t_0) + f_y(P_0)\cdot y'(t_0) = f_x \cdot x' + f_y \cdot y'$$

Observar que la derivada de una función compuesta de una variable puede expresarse como el producto matricial de dos vectores:

:

$$z' = \frac{dz}{dt} = f_x \cdot x' + f_y \cdot y' \quad = \underbrace{\begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}}_{\overline{\nabla} f} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{\overline{r}'(t)}$$

O sea

$$\boxed{z' = \frac{dz}{dt} = \overline{\nabla f} \cdot \overline{r}'}$$

Denominada ***Regla de la Cadena.***

El mismo razonamiento se hace para funciones de más variables.

Sea $f = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ con $\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$ es decir $\bar{r} = \bar{r}(t) = x_1(t)\cdot\bar{e}_1 + \cdots + x_n(t)\cdot\bar{e}_n$

Entonces: $\quad f = f(\bar{r}(t)) = f(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)) = F(t)$

si $\bar{r}' = \bar{r}'(t) = x_1'(t)\,\bar{e}_1 + \cdots + x_n'(t)\,\bar{e}_n$;

por regla de la cadena:

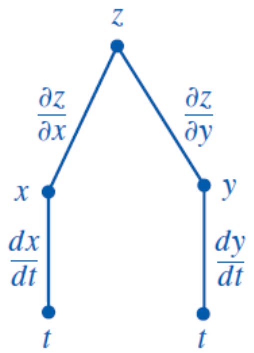
$$\boxed{\frac{df}{dt} = f_{x1}.x_1' + f_{x2}.x_2' + \cdots + f_{x_n}.x_n'}$$

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & \cdots & f_{x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \overline{\nabla} f \cdot \bar{r}'(t)}$$

El significado de la variable dependiente z es diferente en cada lado de la expresión de la regla de la cadena. En el lado izquierdo se refiere a la composición $z = f(x(t), y(t))$ como una función de una sola variable t. En el lado derecho se refiere a la función $z = f(x, y)$ como una función de dos variables x y y.

El **diagrama de árbol** representa una manera fácil de recordar la regla de la cadena. La “verdadera” variable independiente en la composición es t, mientras que x y y son variables intermedias, y z es la variable dependiente.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{z} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbf{x} \arrow[r] & \mathbf{t} \\ & \mathbf{y} \arrow[r] & \mathbf{t} \end{tikzcd}$$



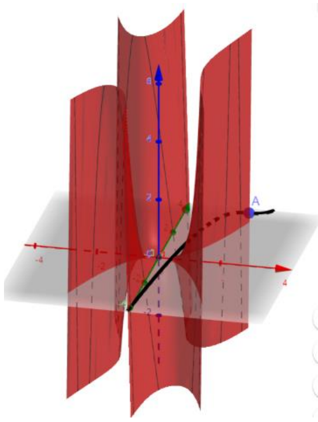
Para la **interpretación física del cambio a lo largo de la curva**, piense en un objeto cuya posición está cambiando con el tiempo t. Si $z = T(x, y)$ es la temperatura en cada punto (x, y) a lo largo de una curva C con ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, entonces la composición $z = T(x(t), y(t))$ representa la temperatura en relación con t a lo largo de la curva. La derivada dz/dt es entonces la tasa de cambio de la temperatura debido al movimiento a lo largo de la curva.

Ejemplo:

Calcular la derivada de $z = f(x,y) = x^5 - 2xy^2$ siendo $\bar{r} = \bar{r}(t) = \begin{cases} x = t+2 \\ y = t^3 + 4 \end{cases}$ en $t = 0$

Solución:

Debemos calcular $\dfrac{df}{dt} = f'(t) = \overline{\nabla} f\left(\bar{r}(t)\right) \cdot \bar{r}'(t)$

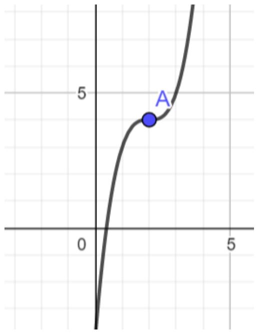


Encontremos las componentes del gradiente

$f_x = 5x^4 - 2y^2$
$f_y = -4xy$

Como $\bar{r}(t) = (t+2) \cdot \vec{i} + (t^3 + 4) \cdot \vec{j}$; calculamos $x' = 1$ y $y' = 3t^2$.

Luego $\bar{r}'(t) = 1 \cdot \vec{i} + 3t^2 \cdot \vec{j}$



Resulta: $\dfrac{df}{dt} = (5x^4 - 2y^2) \cdot 1 + (-4xy) \cdot 3t^2$, donde $x = t+2$, $y = t^3 + 4$

en $t = 0$; $x = 2$; $y = 4$

$$\frac{df}{dt} = 5(2)^2 - 2(4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 0 = 48$$

Ejemplo:

La presión P en kilopascales, el volumen V en litros y la temperatura T en ° Kelvin de un mol de un gas ideal, están relacionados mediante la ecuación $P\ V = 8{,}31\ T$. Determine la razón a la cual la presión cambia cuando la temperatura es 300 °K y se incremente a razón 0,1 °K/seg y el volumen es de 100 litros y se incrementa a razón de 0,2 litros/seg.

Solución: Si t representa el tiempo que transcurre en segundos, entonces en un instante dado:

T = 300 °K , $\frac{dT}{dt} = 0{,}1\ °K/seg$, V = 100 lt , $\frac{dV}{dt} = 0{,}2\ \ lt/seg$

Por la regla de la cadena:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\Delta P}{\Delta V}\frac{dV}{dt} = \frac{8{,}31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8{,}31T}{V^2}\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{8{,}31}{100}\,.\,0{,}1 - \frac{8{,}31\,.\,300}{100^2}\,.\,0{,}2 = \ -0{,}04155$$

La presión disminuye a razón de 0,042 kPa/seg.

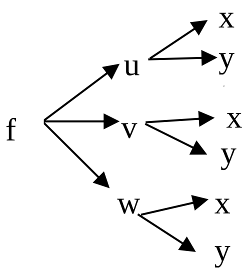
9.2.2. Funciones Compuestas de Varias Variables Independientes

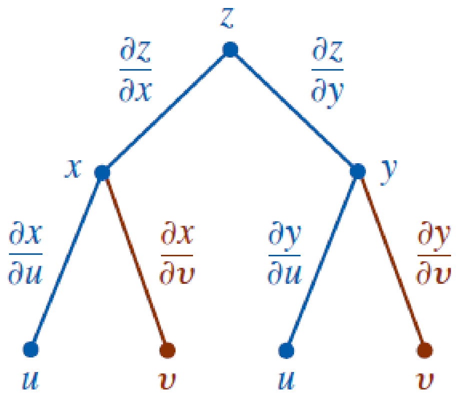
Sea $z = f(u,v,w)$ diferenciable en (u_0,v_0,w_0) y $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ y $w = w(x,y)$ son funciones diferenciables en (x_0,y_0), con $\bar{r}(x,y) = u(x,y)\,\bar{e}_1 + v(x,y)\,\bar{e}_2 + w(x,y)\,\bar{e}_3$.

En este caso de la regla de la cadena contiene 3 tipos de variables, x e y que son variables independientes, u, v, w que se denominan variables intermedias y z que es la variable dependiente.

Entonces $z = f(\bar{r}(x,y)) = f\big(u(x,y),v(x,y),w(x,y)\big) = F(x,y)$ diferenciable en (x_0,y_0).

Sabemos que $f = f(u,v,w)$ y $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ y $w = w(x,y)$, esquemáticamente:





$$\bar{r}_x = u_x\,\bar{e}_1 + v_x\,\bar{e}_2 + w_x\,\bar{e}_3$$
$$\bar{r}_y = u_y\,\bar{e}_1 + v_y\,\bar{e}_2 + w_y\,\bar{e}_3$$
,

Por regla de la cadena

$$z_x = f_u\, u_x + f_v\, v_x + f_w\, w_x \quad , \quad z_y = f_u\, u_y + f_v\, v_y + f_w\, w_y$$

Expresado en forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} z_x & z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u & f_v & f_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{bmatrix}$$

Y cada deriva parcial (por ejemplo z_x) se puede expresar como

$$z_x = \begin{bmatrix} f_u & f_v & f_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ v_x \\ w_x \end{bmatrix}$$

Si se considera que $\bar{r} = u\,\bar{e}_1 + v\,\bar{e}_2 + w\,\bar{e}_3$, $\quad \bar{r}_x = u_x\,\bar{e}_1 + v_x\,\bar{e}_2 + w_x\,\bar{e}_3$

$$\boxed{z_x = \overline{\nabla} f \cdot \bar{r}_x}$$

De igual forma y siendo $\bar{r}_y = u_y\,\bar{e}_1 + v_y\,\bar{e}_2 + w_y\,\bar{e}_3$

$$\boxed{z_y = \overline{\nabla} f \cdot \bar{r}_y}$$

Ejemplo:

Calcular z_x , z_y . Si $z = f(u,v) = ln(u^2 + v)$ con $\begin{cases} u = e^{x+y^2} \\ v = x^2 + y \end{cases}$ (1)

Se debe calcular $\overline{\nabla} f = (f_u , f_v)$

$$f_u = \frac{2 \cdot u}{u^2 + v} \qquad\qquad f_v = \frac{1}{u^2 + v}$$

$$u_x = e^{x+y^2} \qquad\qquad v_x = 2x$$

$$u_y = 2 \cdot y \cdot e^{x+y^2} \qquad\qquad v_y = 1$$

$$z_x = \overline{\nabla} f \cdot \bar{r}_x = \left(\frac{2u}{u^2 + v} \quad , \frac{1}{u^2 + v} \right) \cdot \left(e^{x+y^2} , 2x \right)$$

$$z_y = \overline{\nabla} f \cdot \bar{r}_y = \left(\frac{2u}{u^2 + v} , \frac{1}{u^2 + v} \right) \cdot \left(2y \cdot e^{x+y^2} \quad , 1 \right)$$ *[con valores de x e y dadas por (1)]*

10. DERIVADA DE FUNCIONES IMPLICITAS

10.1. Definición:

Se dice que "*y*" es función implícita de "*x*", cuando esta dada por la ecuación $F(x,y) = 0$.
No siempre es posible despejar "*y*" en forma explícita como función de "*x*", *y* = *f (x)* (o "*x*" como función de "*y*", *x* = *g* (*y*)), a partir de la función implícita $F(x,y) = 0$.

Ejemplo:

1) Sea $F(x,y) = y + x^2 y - 1 = 0$, luego despejando "*y*" resulta: $y\,(1 + x^2) = 1$

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$ se observa que $y = f(x)$.

2) Sea $F(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$ (1)

Si esta expresión definiese a "*y*" como función de "*x*", el par (*x*, *f* (*x*)) debe verificar (1), entonces sería:

$$x^2 + (f(x))^2 + 1 = 0$$

$$x^2 + (f(x))^2 = -1$$ como $x^2 + (f(x))^2 \geq 0$.

Por lo tanto no existe ningún valor de x para el cual se verifique $y = f(x)$. Las condiciones suficientes para que una expresión $F(x, y) = 0$ defina implícitamente a "y" como función de "x" en un intervalo están dadas en el siguiente teorema.

10.2. Teorema de existencia y unicidad de la función implícita de una variable

Sea $z = F(x, y)$ definida sobre una región abierta $R \subseteq \Re^2$, tal que $(a, b) \in R$. Si se verifica:

(1) $F(a, b) = 0$

(2) $F_x(x,y), F_y(x,y)$ existen y son continuas en $U(P_0, \delta) \subseteq R$, $P_0 = (a,b)$

(3) $F_y(a,b) \neq 0$

Entonces $\forall x \in (a - \Delta x, a + \Delta x)$ existe una función continua y derivable $y=f(x)$ tal que $F(x, f(x)) = 0$ y su derivada $f'(a)$ viene dada por la formula:

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = -\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)} \qquad \text{(i)}$$

Considerando a la función como compuesta y aplicando la regla de la cadena queda:

$$F(x, y(x)) = 0 \rightarrow F_x \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + F_y \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = 0 \rightarrow y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

La derivada segunda $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ viene dada por:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Fxx(Fy)^2 - 2FxyFxFy + Fyy(Fx)^2}{(Fy)^3}}$$

Nota: Si en el teorema anterior pedimos $F_x(a,b) \neq 0$ en lugar de $F_y(a,b) \neq 0$ se puede demostrar que $F(x,y) = 0$ define a "x" como función de *"y" o sea x = g (y).*

10.3. Teorema

Sea $w = F(x,y,z)$ definida en una región abierta $R \subseteq \Re^3$ tal que $P_0 = (a,b,c) \in R$. Si se verifica:

(1) $F(a, b, c) = 0$

(2) $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$ y $F_z(x,y,z)$ existen y son continuas en $U(P_0, \delta) \subseteq R$.

(3) $F_z(a,b,c) \neq 0$

Entonces $\forall\ (x,y) \in U((a,b), \delta)$ existe una función $z = f(x, y)$ diferenciable, tal que

F(x, y, f(x, y)) = 0 y sus derivadas parciales vienen dadas por las formulas:

$$f_x(a,b) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = -\frac{F_x(a,b,c)}{F_z(a,b,c)}$$
$$f_y(a,b) = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = -\frac{F_y(a,b,c)}{F_z(a,b,c)} \qquad \text{(ii)}$$

Decimos en este caso que *F(x, y, z) = 0* define implícitamente a *z* como función de *x* e *y*: *z = f (x, y)* o que *z = f (x, y)* está dada en forma implícita por *F(x, y, z) = 0*.

Derivando las formulas (ii) obtenemos: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Donde por ejemplo:

$$\boxed{z_{xy} = -\frac{F_{xy}\cdot(F_z)^2 - F_{xz}\cdot F_y \cdot F_z - F_x \cdot F_z \cdot F_{zy} + F_{zz}\cdot F_x \cdot F_y}{(F_z)^3}\ .}$$

Ejemplo:

Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto (*1*,*2*), sabiendo que $y^3 + y^2 - 5y - x^2 - 1 = 0\cdot$.

Observe que en este caso no es fácil despejar "*y*", como función de "*x*" y luego derivar esta expresión, entonces utilizando el resultado anterior tenemos:

$F(1,2) = 8 + 4 - 10 - 1 - 1 = 12 - 10 - 2 = 12 - 12 = 0$, verifica (1)

Si $F(x,y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 - 1$

Se calcula: $F_x(x,y)$ y $F_y(x,y)$, obteniendo

$F_x(x,y) = -2x$, y $F_y(x,y) = 3y^2 + 2y - 5$. Luego resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{-2x}{3y^2 + 2y - 5} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}\ .$$

En el punto *P = (1,2)*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = \frac{2\cdot 1}{3\cdot(2)^2 + 2\cdot 2 - 5} = \frac{2}{3\cdot 4 + 4 - 5} = \frac{2}{12 - 1} = \frac{2}{11}\ .$$

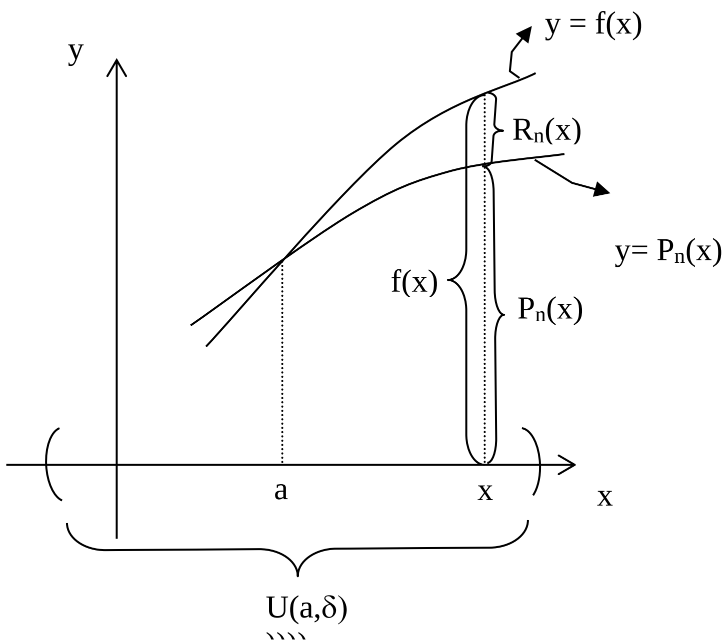
11. FÓRMULA DE TAYLOR

En Cálculo I hemos estudiado la Formula de Taylor para funciones de una variable.
Recordemos: Sea $y = f(x)$ derivable hasta el orden $(n+1)$ inclusive, en un entorno del punto $x = a$, luego para todo x de ese entorno se verifica:

$$\boxed{f(x)= f(a)+ f'(a)\frac{x-a}{1!}+ f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+ f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+R_n(x)}$$

donde, $R_n(x) = f^{(n+1)}(a+\theta h)\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$, es llamado resto o término complementario

Nota: Esta fórmula permite aproximar la función $y = f(x)$ por el polinomio $y = P_n(x)$ en el entorno del punto $x = a$.

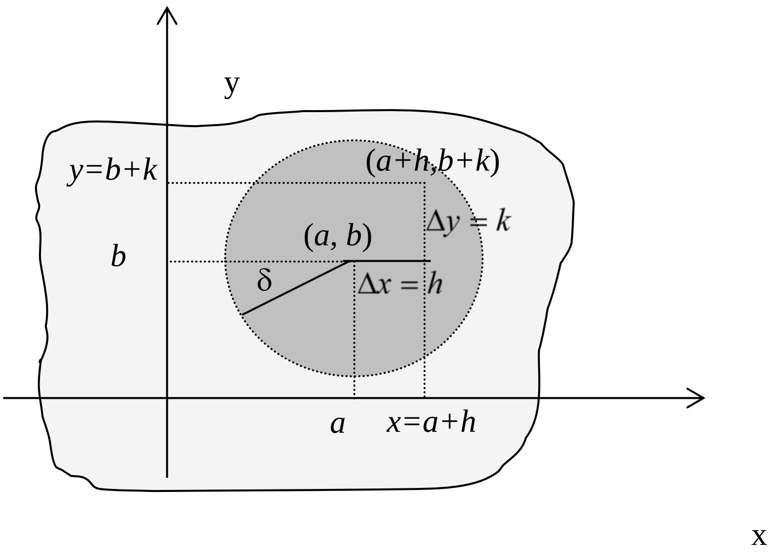


11.1. FÓRMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Sea $z= f(x,y)$ una función **diferenciable** hasta el orden $(n+1)$ inclusive, en un entorno del punto (a, b). Entonces se puede aproximar la función de dos variables, $f(a+h, b+k)$, mediante un **polinomio de n-ésimo** grado, en potencias de $h=x-a$ y $k=y-b$, en menos de un término complementario. Este polinomio se denomina fórmula de Taylor.

Para ello conocemos:
1) El valor de la función y sus "n" primeras derivadas en (a, b).
2) Los valores h y k, tales que $\sqrt{h^2+k^2} < \delta$; ($h= x-a =\Delta x$; $k= y-b =\Delta y$).

Teniendo en cuenta que:



$x = a + h \rightarrow h = x - a$

$y = b + k \rightarrow k = y - b$

Se demuestra:

(I)
$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a,b) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b) + \ldots +$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b) + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k)\,\cdot$$

con $0 < \theta < 1$.

Empleando la notación diferencial, se obtiene:

$$\boxed{f(a+h,b+k) = f(a,b) + df(a,b) + \frac{d^2 f(a,b)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(a,b)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k)}{(n+1)!}\,.}$$

con $0 < \theta < 1$.

Si en (I) llamando $(a+h\ ,\ b+k) = (x, y)$ punto perteneciente al entorno $U((a,b),\delta)$
Resulta $f(x, y)$ aproximada por un polinomio en potencias de $h = x - a$ y $k = y - b$.
De este modo el desarrollo de la fórmula de Taylor de segundo orden es:

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) +$$
$$\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] + Tc$$

con $(x, y) \in U((a,b),\delta)$

En particular, si el punto *(a,b)* alrededor del cual se hace el desarrollo es el punto *(0,0)*, obtenemos, reemplazando en (I) la llamada formula de Mac Laurin para funciones de dos variables.

$$f(x,y)= f(0,0)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n)} f(0,0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(\theta x,\theta y)$$

con $0 < \theta < 1$

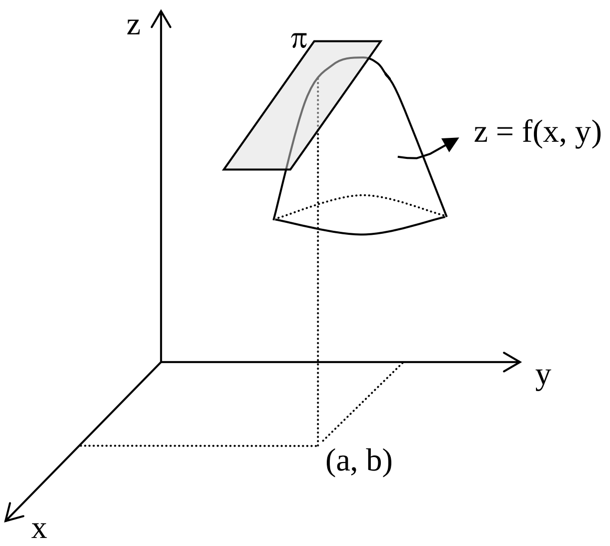
Observación

a) Si consideramos la fórmula de Taylor hasta el término de primer orden, tenemos:

$$f(a+h,b+k)\cong f(a,b)+h\ f_x(a,b)+k\ f_y(a,b)$$

Obteniendo así un **polinomio de primer orden en *h* y *k*** (aproximación lineal).
Observar que el segundo **miembro** de esta expresión es el **plano tangente** a la superficie $z = f(x, y)$ en (a, b).

$$f(a+h,b+k)\cong f(a,b)+(x-a)\ f_x(a,b)+(y-b)\ f_y(a,b)$$
$$\Delta z\cong(x-a)\ f_x(a,b)+(y-b)\ f_y(a,b)$$



Ejemplo: calcular la aproximación lineal de la función $z = f(x,y) = x^3 y + 6 x y^2$ en P_0 (1,1)

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\cong f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\Delta x}+f_y(x_0,y_0)\underbrace{(y-y_0)}_{\Delta y}$$

donde: $\Delta x = h = x - x_o$; $\Delta y = k = y - y_o$

$$f(1+\Delta x,1+\Delta y)\cong f(1,1)+f_x(1,1)\underbrace{(x-1)}_{\Delta x}+f_y(1,1)\underbrace{(y-1)}_{\Delta y}=7+9(x-1)+13(y-1)$$

$$f(1+\Delta x,1+\Delta y)\cong 7+9x-9+13y-13=9x+13y-15$$

$x^3 y + 6xy^2\big|_{(1,1)} \cong$ **9x+13y -15** para $(x,y)\varepsilon U(1,1)$ (aproximación lineal).

Observación: el polinomio de tercer grado queda aproximado por un plano (aproximación lineal).

b) Si consideramos la **fórmula de Taylor hasta el 2° orden** es un **polinomio cuadrático** en *h* y *k* (aproximación cuadrática)

$$\boxed{\begin{array}{l} f(a+h,b+k)\cong f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\dfrac{1}{2!}\,(f_x(a,b)(x-a)^2+ \\ 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2) \end{array}}$$

Para mejorar la aproximación en este punto es necesario aumentar el orden del polinomio.

Ejemplo:

1) Desarrollar en serie de Taylor hasta los términos de 3° orden inclusive $f(x,y)=e^x\cdot seny$ en *P = (0,0).*

$f(0,0)=0$ $\quad f_x = e^x\cdot seny\big|_P = 0$ $\quad f_y = e^x\cdot \cos y\big|_P = 1$

$f_{xy} = e^x\cdot \cos y\big|_P = 1$ $\quad f_{xx} = e^x\cdot seny\big|_P = 0$ $\quad f_{yy} = -e^x\cdot seny\big|_P = 0$

$f_{xxx} = e^x\cdot seny\big|_P = 0$ $\quad f_{xxy} = e^x\cdot \cos y\big|_P = 1$ $\quad f_{xyy} = -e^x\cdot seny\big|_P = 0$

$f_{yyy} = -e^x\cdot \cos y\big|_P = -1$, luego la aproximación de la función es:

$$f(x,y)=e^x sen(y)\cong y+x\ y+\frac{x^2\ y}{2}-\frac{y^3}{6}$$

Veamos una tabla con el valor de la función exacta y con la aproximación de la misma.

(x,y)	$y=e^x\cdot seny$	$f=y+x\cdot y+\dfrac{x^2y}{2}-\dfrac{y^3}{6}$
	(exacta)	(función aproximada por Taylor)
(0,0)	0	0
(0.1,0.1)	0.1103329887	0.11033333333
(0.2,0.2)	0.2426552686	0.24266666667
(0.5,0.5)	0.7904390832	0.79166666667
(1.0,1.0)	2.287355287	2.333333

12. EXTREMOS LIBRES DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

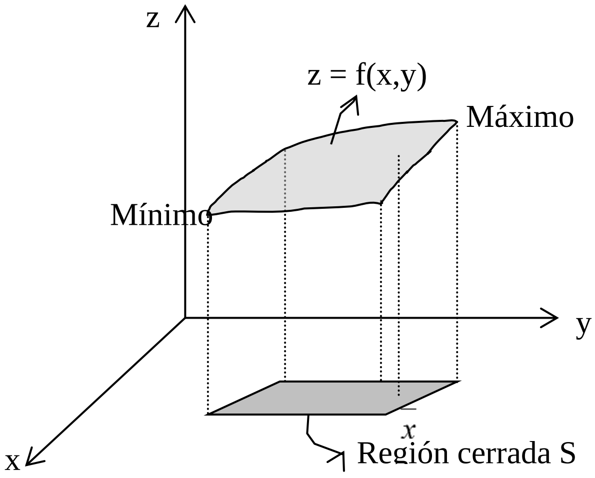
12.1. Definición Extremos Absolutos

Sea $f: S \to \Re$, $S \subseteq \Re^n$ un campo escalar, S un conjunto cerrado y acotado tiene un máximo o mínimo absoluto (en sentido estricto) en el punto $\bar{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de S si se cumple una de las siguientes condiciones para todo $\bar{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S$ distinto al punto $\bar{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

$\forall \bar{x} \in S \ (\bar{x} \neq \bar{a}): \ f(\bar{x}) < f(\bar{a})$; máximo absoluto

$\forall \bar{x} \in S \ (\bar{x} \neq \bar{a}): \ f(\bar{x}) > f(\bar{a})$; mínimo absoluto

En el gráfico siguiente observamos que f (x,y) tiene en S un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

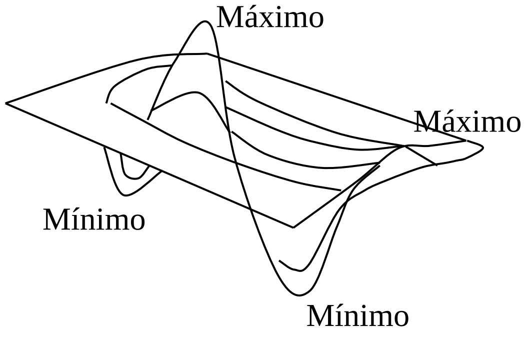


12.2. Definición Extremos Relativos

Sea $f: S \to \Re$, $S \subseteq \Re^n$ un campo escalar con $\bar{x} \in S$ y $\bar{a} \in S$; $f(\bar{x})$ tiene un extremo relativo (en sentido estricto) en el punto $\bar{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ si existe un número $\delta > 0$ tal que para todo $\bar{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in U_*(\bar{a}, \delta)$ se verifica:

$f(\bar{x}) < f(\bar{a})$; máximo relativo

$f(\bar{x}) > f(\bar{a})$; mínimo relativo



Nota:

1) Si en una u otra de las condiciones se sustituye < (o >) por ≤ (o ≥) se dice entonces que hay máximo (o mínimo), relativo o absoluto, en sentido amplio.

2) En el caso de una función de dos variables $f\ (x,y)$ definida en un recinto R, diremos que en el punto $(a,b) \in$ R, en sentido estricto:

- toma **valor máximo** si se verifica f (a+h,b+k) < f(a,b) ⇒ **Δz < 0**;
- toma un **valor mínimo** si se verifica f (a+h,b+k) > f(a,b) ⇒ **Δz > 0** para todos los puntos que pertenecen al $U_*((a,b),\delta)$.

12.3. Condición Necesaria de Extremo Relativo

La condición necesaria para que $z = f\ (x, y)$ función que admite derivadas parciales, tenga un máximo o mínimo relativo, en sentido estricto o amplio, en un punto interior (a, b) $\in$ *C*, es que:

$$\boxed{f_x(a,b)=0},\ \boxed{f_y(a,b)=0}$$

Observar que si $z = f\ (x, y)$ es diferenciable esta condición significa que: $\overline{\nabla} f = 0$

Demostración:

Cuando la función es diferenciable, las condiciones dadas significan geométricamente que el plano tangente es horizontal (es decir, paralelo al plano xy), con ecuación reducida a $z = c$.
La ecuación del plano tangente en el punto (a,b,f(a,b)) es:

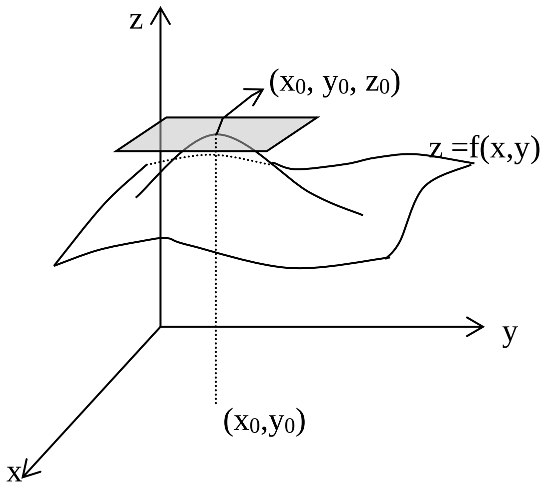
$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

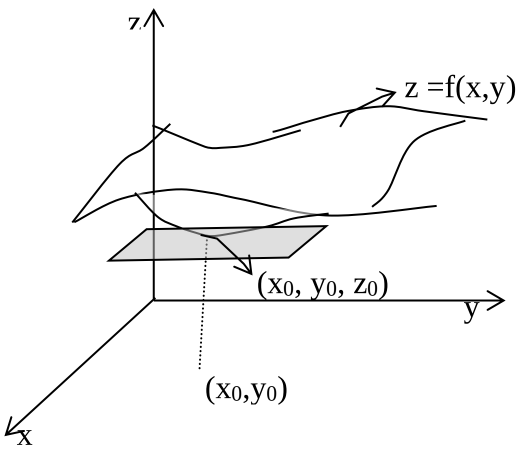
Si el plano es horizontal su ecuación debe ser $z = c = f(a,b)$

$$0 = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

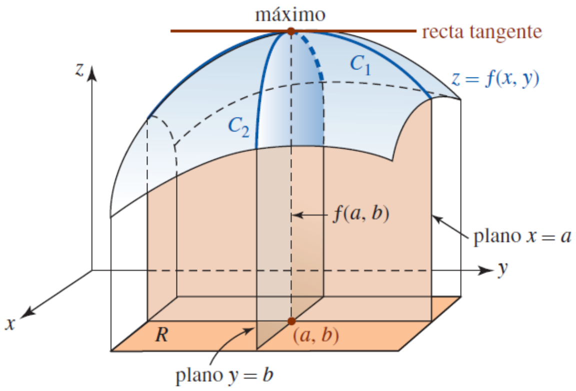
podemos concluir que: $f_x(a,b)=0$

$f_y(a,b)=0$





En la práctica la búsqueda de los extremos de una función $f\ (x, y)$, comienza resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$.



Del cual se obtienen un numero (finito o infinito) de raíces, $(x_1,y_1);(x_2,y_2);(x_3,y_3);\ldots$, que se denominan **puntos críticos** o extremantes, pues en ellos puede haber extremo (relativo o absoluto en sentido estricto o amplio).

Luego se **analiza el signo de Δz** para determinar si son máximos o mínimos relativos.

12.4. Condiciones suficientes de extremo relativo. Análisis del signo del Δz

Sea *(*a, b*)* un punto crítico de *z = f(x, y)* una función con derivadas parciales primeras y segundas en un entorno de dicho punto, continuas y no simultáneamente nulas en (*a*, *b*):
La formula de Taylor para n = 1 es:

$$f(a+h,b+k)= f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a,b)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+\theta h,b+\theta k)$$

$0 < \theta < 1$

Teniendo en cuenta la condición necesaria y la continuidad de las derivadas segundas resulta:

$$f(a+h,b+k)= f(a,b)+\frac{1}{2}\left[h^2(f_{xx}(a,b)+\varepsilon_1)+2\,h\,k(f_{xy}(a,b)+\varepsilon_2)+k^2(f_{yy}(a,b)+\varepsilon_3)\right]$$

con $\varepsilon_i \to 0$ para $\rho = +\sqrt{h^2+k^2} \to 0$, ($i$ = 1, 2, 3)

$o(\rho^2)=\frac{1}{2}\varepsilon_1\, h^2 + 2\,h\,k\,\varepsilon_2 + \frac{k^2}{2}\varepsilon_3$ infinitésimo de orden superior a ρ^2

$$\Delta z = f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{h^2(f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)}_{d^2 f(a,b)}\right] + \theta(\rho^2)$$

O sea:

$$\boldsymbol{\Delta z == \frac{1}{2}\, d^2 f(a,b) + o(\rho^2)}$$

Luego, para **analizar el signo de** Δz, se estudia el signo del **diferencial segundo,** $\boldsymbol{d^2 f(a,b)}$ **, de *z=f(x,y)***

$d^2 f(a,b)=\left[h^2 f_{xx}(a,b)+2\,h\,k\;f_{xy}(a,b)+k^2 f_{yy}(a,b)\right]$ por medio del determinante Hessiano.

$$H = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}{}^{2}(a,b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

El hessiano $H = H(x, y)$ es una función de las mismas variables x, y e interesará para nuestro estudio su signo en los puntos críticos.

Se pueden presentar las siguientes posibilidades:

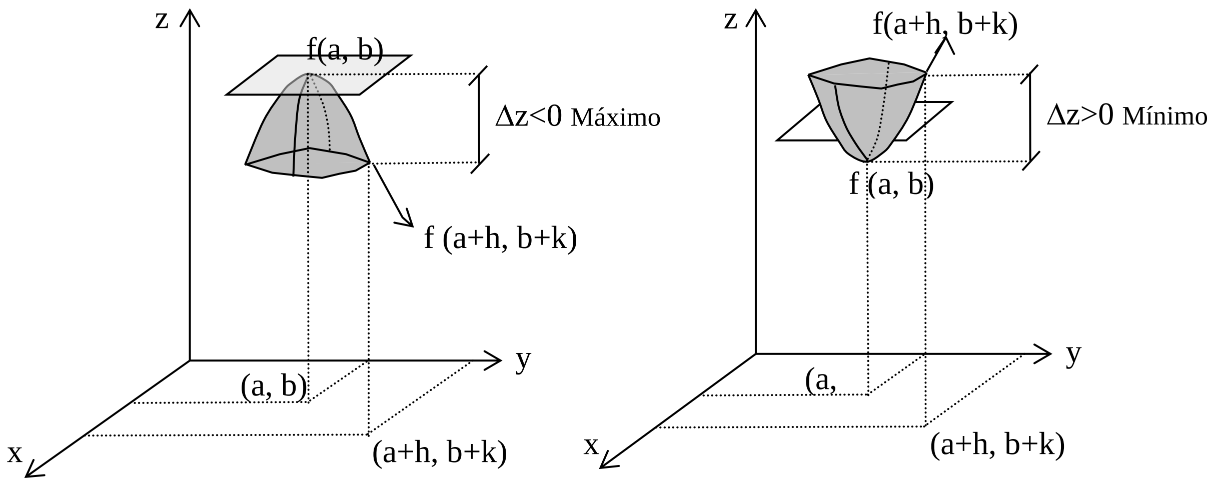
a) Caso Elíptico: ***H* > 0**

En el punto crítico hay extremo.

Sí H > 0 $\Rightarrow$ $f_{xx}(a,b)\ f_{yy}(a,b) - f_{xy}{}^{2}(a,b) > 0 \Rightarrow f_{xx}(a,b).\,f_{yy}(a,b) > f^{2}_{xy}(a,b) \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad f_{xx}(a,b) > 0$ y $f_{yy}(a,b) > 0$ o $f_{xx}(a,b) < 0$ y $f_{yy}(a,b) < 0$

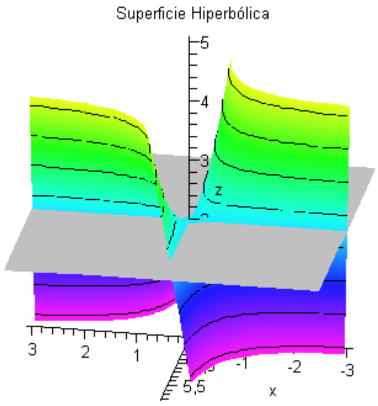
En este caso la superficie queda situada a un mismo lado del plano tangente, el punto (a, b, f (a ,b)) se llama elíptico y en él existe extremo relativo, si la superficie queda por debajo plano tangente $(f_{xx} < 0)$ tendremos máximo estricto; si queda por encima plano tangente $(f_{xx} > 0)$ tendremos mínimo estricto.

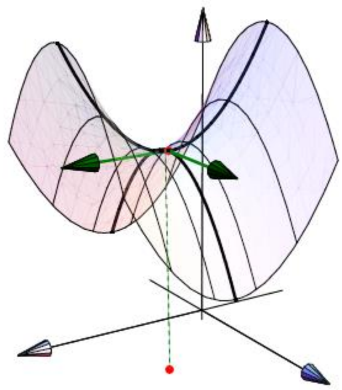


b) Caso Hiperbólico: H < 0

Se demuestra que no hay extremo
Como en las funciones derivables de una sola variable, no todos los puntos críticos dan origen a un extremo local. Una función derivable de una variable podría tener un punto de inflexión. Una función derivable de dos variables podría tener un punto de silla.
DEFINICIÓN Una función derivable *f (x, y)* tiene un punto de silla en un punto crítico *(a, b)* si en un entorno con centro en *(a, b)* existen puntos del dominio *(x, y)* donde *f (x, y) < f (a, b)*, y puntos del dominio *(x, y)* donde *f (x, y) > f (a, b)*. El punto correspondiente *(a, b, f (a, b))* sobre la superficie z = f (x, y) se llama punto de silla o de ensilladura de la superficie.

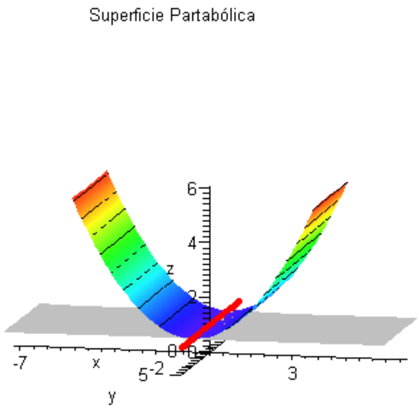
Se puede observar en este caso que la superficie queda a uno y otro lado del plano tangente en el punto (*a*,*b*,*f*(*a*,*b*)). En este caso el punto se llama de ensilladura y en él se puede asegurar que no hay extremo.





c) <u>Caso Parabólico</u>: H = 0

En este caso la superficie está de un solo lado del plano tangente en todas las direcciones rectilíneas, excepto en la correspondiente a una sola recta "singular". Diremos que se trata de un casi-máximo o un casi-mínimo.



Resumen

Sea $z=f(x,y)$ una función con derivadas primeras y segundas continuas y no simultáneamente nulas en un entorno del punto crítico (*a*,*b*). Analizamos el signo de Δz estudiando el signo del diferencial segundo de la función , d^2z , por medio del Hessiano en (*a*,*b*),

$$H=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix},$$

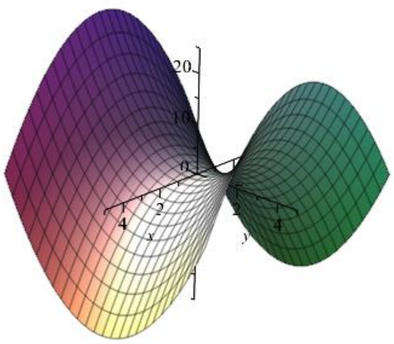
Entonces si:

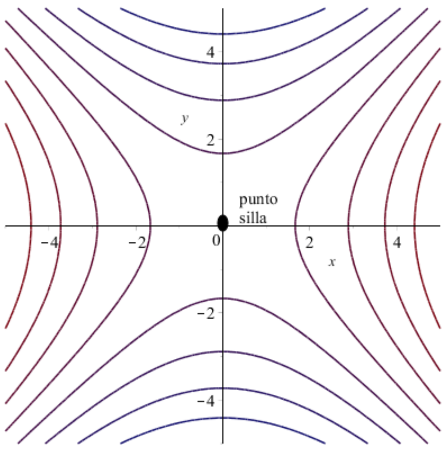
$$H > 0 \quad \begin{cases} f_{xx} > 0 & \textit{mínimo estricto} \\ f_{xx} < 0 & \textit{máximo estricto} \end{cases}$$

$$H < 0 \quad \{\text{no hay extremo - punto silla}$$

$$H = 0 \quad \begin{cases} f_{xx} > 0 \;\; o \;\; f_{yy} > 0 & \textit{casi - mínimo} \\ f_{xx} < 0 \;\; o \;\; f_{yy} < 0 & \textit{casi-máximo} \end{cases}$$

Ejemplo:
1) Determinar los extremos de la función $z = y^2 - x^2$.
Con la ayuda de un software se puede observar la gráfica de la superficie y sus curvas de nivel que permiten concluir que tiene solo un punto de ensilladura en (0,0).
Comprobar esto analíticamente.





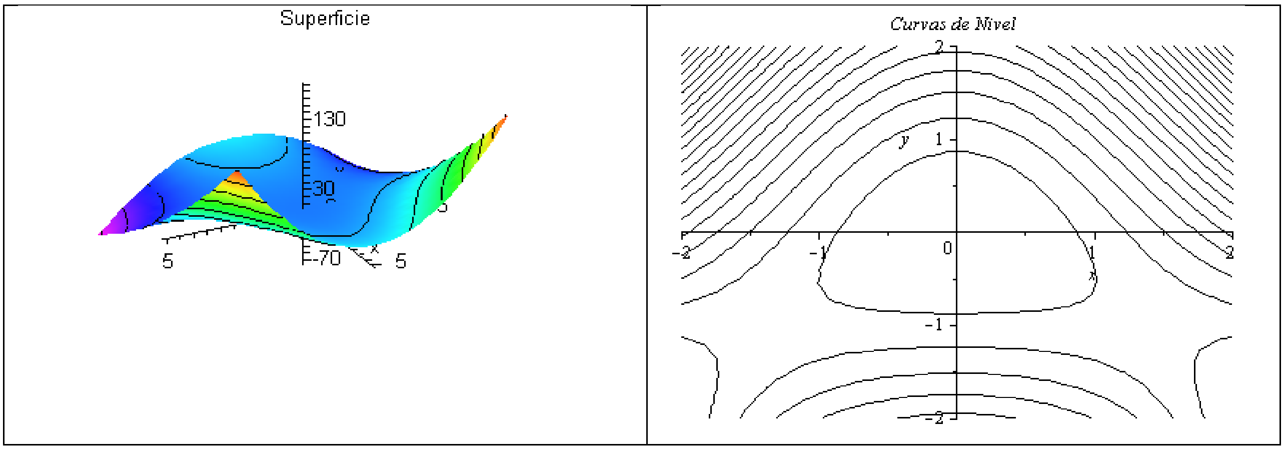
2) Encontrar los puntos críticos de $z = f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ y clasificarlos.
Se calculan:
$z_x = f_x\,(x,y) = 2x + 2xy = 0$
$z_y = f_y\,(x,y) = 2y + x^2 = 0$

por eliminación de y entre esas ecuaciones, se tiene $2x - x^3 = 0$
por lo tanto, $x = 0$ ó $x = \pm\sqrt{2}$.

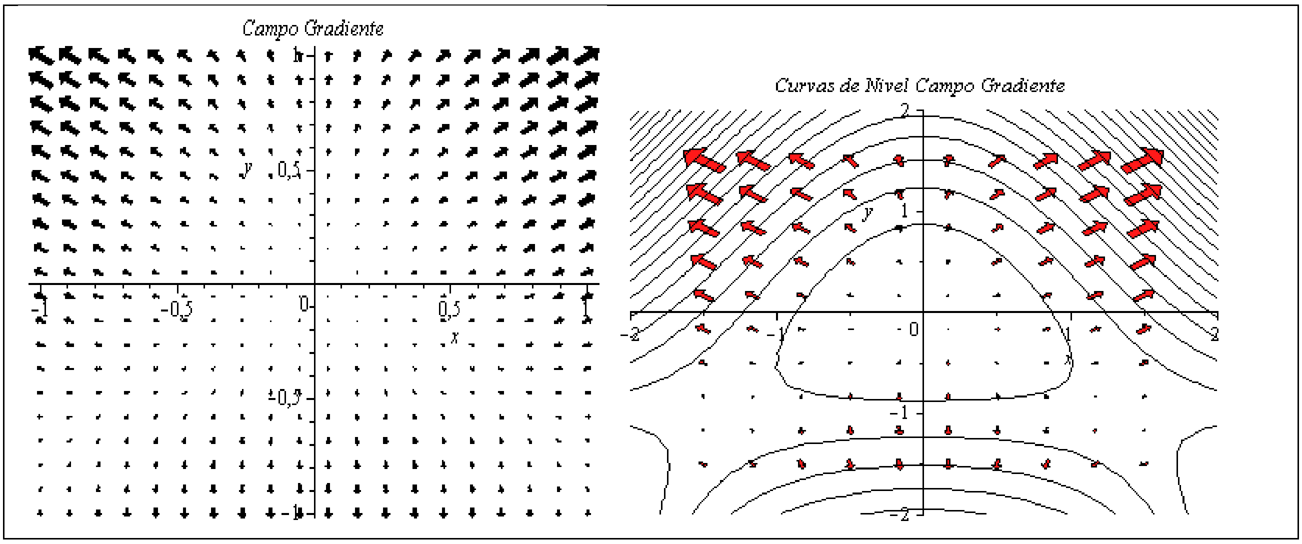
Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación se obtiene $y = 0$ e $y = -1$.

Por lo tanto **los puntos críticos son : $(0,0)$; $(\sqrt{2}, -1)$ y $(-\sqrt{2}, -1)$**
Para cada uno de ellos, necesitamos $f_{xx}(x,y) = 2+2y$; $f_{yy}(x,y) = 2$; $f_{xy} = 2x$ para calcular el valor de Hessiano.
De los cálculos resulta que en los puntos $(\sqrt{2}, -1)$ y $(-\sqrt{2}, -1)$ no hay extremos y en $(0,0)$ existe un mínimo.

Resolver este ejercicio con apoyo de un software científico.
Primero se grafica la función y el mapa de contorno.



Luego se grafica el campo gradiente, y se superpone el campo gradiente a las curvas de nivel.



Observar que lo obtenido analíticamente concuerda con las gráficas obtenidas

13. BIBLIOGRAFÍA

1 – Stewart, J. 2010. *CÁLCULO de VARIAS VARIABLES*. Conceptos y Contextos. Ed. Cangage – Learning.

2 - Thomas, G. Jr. Y Finney, R.L. 1999. *CÁLCULO VARIAS VARIABLES.* Addison Wesley.

3 – Larson, R. E., HostetlerR. P. y Edwards . 1996.*CALCULO* **.** Ed. Mc Graw Hill.

4 – Stewart, J.2002. *CÁLCULO MULTIVARIABLE*. Ed. Thomson – Learning.

5 – Zill, D. G. 1987. *CALCULO* **-** Grupo Editorial Iberoamericana.

6 – Apostol, T. M. 1975.*CALCULUS* **.** Volumen II **-** De. Reverte S.A.

7 - Pastor J. R., Pi Calleja, P. y Trejo, C.A. 1968.*ANÁLISIS MATEMÁTICO* .Volumen II. Ed. Kapeluz.